

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM DO VEÍCULO FERROVIÁRIO UTILIZANDO
PROGRAMA AUTOLEV

Vinicius Alves Fernandes

São Paulo
Novembro, 2009

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM DO VEÍCULO FERROVIÁRIO UTILIZANDO
PROGRAMA AUTOLEV

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Vinicius Alves Fernandes

Orientador: Roberto Spinola Barbosa

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
Novembro, 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Fernandes, Vinicius Alves

**Modelagem de veículo ferroviário utilizando programa
Autolev / V.A. Fernandes. – São Paulo, 2009.
83 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Dinâmica veicular (Simulação computacional) 2. Material
rodante 3. Ferrovias I. Universidade de São Paulo. Escola Poli –
técnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

RESUMO

A modelagem do comportamento dinâmico do veículo ferroviário mostrou-se uma ferramenta importante para a predição da carga dinâmica à qual a via férrea é submetida. Condições de descarrilamento em curvas e a influência de defeitos no trilho (superficiais ou na geometria da própria via) podem ser estudados através de modelos multicorpos do veículo ferroviário.

O presente estudo visa caracterizar o comportamento dinâmico do veículo ferroviário. Para tanto, três etapas foram propostas: obtenção do comportamento do rodeiro, do truque e posteriormente do veículo completo. Esta metodologia permitiu definir parâmetros de cálculo (tais como força nas suspensões) em um modelo mais simples, facilitando a compreensão e reduzindo os erros no modelo do veículo completo, já que este compreende um conjunto de 7 corpos. As equações do movimento foram obtidas através da ferramenta AUTOLEV 4, desenvolvida por Kane e Levinson [1] e [2], e integradas numericamente. O contato roda/trilho é tratado através da teoria de contato desenvolvida por Kalker [3], utilizando-se a rotina FASTSIM. O sistema de coordenadas utilizado segue o proposto por Shabana [4], e aplicado por Pombo e Ambrósio [5]. Desacoplou-se a dinâmica vertical do problema através de equações de restrição ao movimento do rodeiro, impostas pelas condições de existência e unicidade do ponto de contato entre a roda e o trilho, conforme mostrado por Shabana [6].

O resultado de teste de descarrilamento por aplicação de força lateral para um único rodeiro com suspensão primária está em completo acordo aos obtidos por Barbosa [7]. O caso de inscrição em curvas é apresentado para o modelo do veículo completo. A otimização da rotina é efetuada visando-se utilizá-la em aplicações em tempo-real. O mapeamento do índice L/V é obtido para um modelo de veículo, para o qual verifica-se a variabilidade com a velocidade do veículo e o raio da curva.

ABSTRACT

Models of the dynamic behaviour of the railway vehicle have been an important tool to predict the dynamic load on the track. Derailment in curve conditions and the influence of track irregularities may be studied using multibody models of the railway vehicle.

The scope of this study is to characterize the dynamic behaviour of the railway vehicle. In order to achieve this objective, three main steps have been proposed: to model first the wheelset, then the bogie and finally the entire vehicle. This methodology allowed a better understanding of the suspension parameter's influence on the vehicle dynamic behavior. The governing equations of movement have been obtained using the AUTOLEV tool, developed by Kane and Levinson [1] and [2], and integrated numerically. The wheel/rail contact is modeled using the contact theory developed by Kalker [3], through its approximation FASTSIM. The coordinate system proposed by Shabana [4] and used by Pombo and Ambrósio [5] is used. The vertical and lateral dynamics have been uncoupled by both the restriction equations imposed by the track's trajectory and the assumption of the existence and unicity of the contact point between the wheel and the rail, as shown by Shabana [6].

The derailment test through increasing lateral force for a restricted wheelset is in accordance with the results obtained by Barbosa [7]. The curve case is presented for the complete vehicle model. The routine optimization has been performed aiming its use with real-time applications. The velocity and curve radius non linear influence on the L/V criteria have been showed for a set of fixed vehicle parameters.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1. Introdução	1
1.1 Aspectos relacionados à via férrea	2
1.2 Estrutura do veículo ferroviário.....	8
1.3 Mecânica do Contato Roda/Trilho	11
1.4 Modelo de contato - FASTSIM.....	13
1.5 Modelos de interação veículo - via.....	14
1.6 Critérios de segurança	16
1.7 Autolev	17
2. Modelo Matemático	19
2.1 Modelo da Via	20
2.2 Modelo do rodeiro, truque e vagão	23
2.3 Escorregamento e forças no contato.....	26
2.4 Integração numérica das equações do movimento do sistema multicorpos	31
3. Simulações e Discussão	33
3.1 Estudo de aplicação de força lateral no modelo de rodeiro.....	33
3.2 Inscrição e saída de curva de pequeno raio para o veículo completo.....	36
3.3 Otimização dos parâmetros da rotina visando o tempo-real	40
3.4 Variação do critério L/V.....	46
4. Conclusões e Perspectivas	55
Bibliografia	57
Anexo 1 – Modelo do veículo ferroviário no AUTOLEV	60

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Auto-direcionamento do veículo	1
Figura 2 - Perfil trilho UIC 60	3
Figura 3 - Irregularidades da via férrea.....	4
Figura 4 - Modelo de malha em elementos finitos utilizado por Bodin.....	6
Figura 5 - Propagação de onda em um massivo tridimensional para uma carga vertical móvel.....	6
Figura 6 - Modelo de contato para Molecular Dynamics	7
Figura 7- Visualização de modelo de via em elementos discretos comportando lastro e dormente.....	8
Figura 8 - Visualização de um corte vertical da camada de lastro.....	8
Figura 9 - Veículo ferroviário para transporte de passageiros	9
Figura 10 - Estrutura do truque ferroviário de carga Baber	10
Figura 11 - Discretização por elementos utilizada por FASTSIM[12].....	13
Figura 12 - Modelo de interação roda-trilho, com irregularidades geométricas no trilho	15
Figura 13 - Modelo acoplado veículo-via	15
Figura 14 - Representação da via para o caso de inscrição do veículo ferroviário....	21
Figura 15 - Exemplo de trajetória de inscrição em curva de raio 1000m	21
Figura 16 - Variação da superelevação ϕ da via segundo a curvatura.....	23
Figura 17 - Base de referência do rodeiro em relação à base da via.....	24
Figura 18 - Truque completo e suspensão primária	25
Figura 19 - Versores do plano de contato roda/trilho	26
Figura 20 - Variação do raio da roda segundo um deslocamento lateral	27
Figura 21 - Ângulo do plano de contato roda/trilho segundo um deslocamento lateral	28
Figura 22 - Dimensões b/a da elipse de contato segundo um deslocamento lateral ..	29
Figura 23 - Forças na roda esquerda para teste de descarrilamento.....	35
Figura 24 - Distribuição normalizada de forças lateral e longitudinal.....	35

Figura 25 - Critério L/V para descarrilamento.....	36
Figura 26 - Trajetória imposta ao veículo - entrada e saída de curva de pequeno raio	37
Figura 27 - Deslocamento lateral para entrada e saída de curva de raio 250m.....	38
Figura 28 - Ângulo de ataque para entrada e saída de curva de raio 250m	38
Figura 29 - Forças no contato da roda direita (externa) para rodeiro frontal	39
Figura 30 - Índice L/V para rodas do truque frontal	40
Figura 31 - Deslocamento lateral dos rodeiros frontal e posterior do H frontal	42
Figura 32 - Forças no contato para roda direita (externa) do rodeiro frontal.....	43
Figura 33 - Erro porcentual do deslocamento lateral e força no contato para valores de MX e MY	43
Figura 34 - Erro porcentual para inscrição em curva severa.....	45
Figura 35- Mapeamento do índice L/V	48
Figura 36 - Forças na roda direita (externa) para exemplo de inscrição em curva	49
Figura 37 - Índice L/V para formulação teórica.....	50
Figura 38 - Variação do índice L/V com superlevação - resultado da rotina	51
Figura 39 - Variação de FC com raio e velocidade.....	52
Figura 40 - Fator de Correção calculado e aproximado	53
Figura 41 - L/V para diferentes formulações e variação do coeficiente de atrito	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados de tempo de simulação	44
Tabela 2 - Características do veículo utilizado	47

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de ferramentas de modelagem multicorpos tem permitido um rápido desenvolvimento de modelos do veículo ferroviário de complexidade crescente. Obter um modelo de veículo utilizado no Brasil, através de uma modelagem que permita completo acesso às equações do movimento, é um objetivo importante e permitirá observar a influência dos diversos parâmetros internos no comportamento do veículo, assim como condições de estabilidade em curvas e segurança.

O desempenho do veículo está intimamente relacionado com o contato entre a roda e o trilho e as forças desenvolvidas neste, já que ele não possui um sistema de direção e depende exclusivamente do seu direcionamento próprio. Este direcionamento próprio é produzido através da conicidade da pista de rolamento da roda, que produz diferentes raios de rolamento para diferentes deslocamentos laterais. Com isso forças laterais surgem no contato roda-trilho, que são responsáveis pela centralização, estabilidade e inscrição em curvas. Este auto-direcionamento do rodéio é apresentado esquematicamente na Figura 1

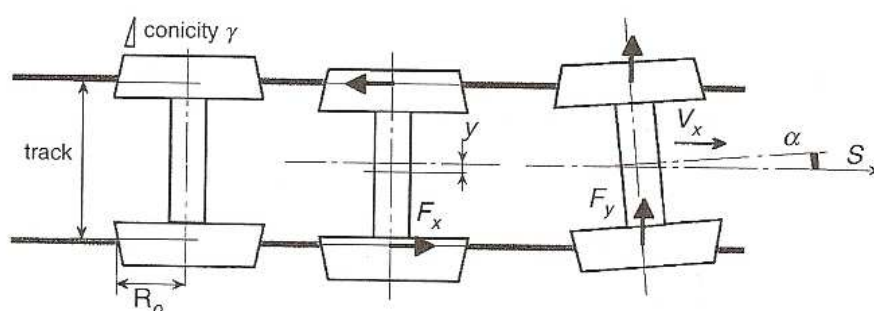


Figura 1 - Auto-direcionamento do veículo

Além disso, outro aspecto importante é a geometria e o perfil da roda e do trilho. Eles desempenham papel muito importante no direcionamento, inscrição em

curvas e estabilidade do veículo ferroviário. A roda possui perfil cônico para o auto-direcionamento do veículo e um friso que limita os deslocamentos laterais. O boleto do trilho possui sua parte superior curva, buscando contato único com a roda. Para a modelagem do veículo, as propriedades do contato têm grande influência nas forças envolvidas neste. Como foi concluído por Mace, a interação roda/trilho pode acarretar geometrias de contato que afetam de modo negativo o direcionamento, além de acarretarem efeitos indesejáveis [8].

Como veremos adiante, uma das fontes de não linearidades do sistema em questão são as propriedades do contato. Estas variam de maneira abrupta dependendo do perfil roda/trilho considerado, e com isso levam a uma grande preocupação quanto à estabilidade da resolução numérica (principalmente no caso de integradores de passo fixo). Outras fontes de não linearidades são os elementos de suspensão, devido tanto ao comportamento mecânico do material (viscoelástico, linear por partes, etc) ou o próprio traçado da via no caso de curvas. No caso do modelo não linear completo, deve-se também considerar a não linearidade decorrente das rotações dos rodeiros para o direcionamento do veículo.

Deformação nas rodas e consequentemente falha são causadas pelas grandes forças desenvolvidas no contato. Segundo Grassie, a direção de falha na superfície da roda reflete a direção da força tangencial presente no contato [9]. Com isso, bem definir a força tangencial acarreta também em melhor precisar as condições de segurança do veículo, principalmente nos novos trens de passageiros de alta velocidade, como o TGV. A principal preocupação dos projetistas atualmente é obter condições de alta velocidade sem instabilidade, como discutido por Lee [10].

1.1 Aspectos relacionados à via férrea

A via férrea é responsável pela transmissão das forças transversais, verticais e longitudinais da roda até o solo. Sua geometria e resistência mecânica são fixadas para obter-se uma qualidade uniforme.

O trilho é o primeiro elemento de contato entre o veículo e a via, tendo por objetivo de dirigir o trem e de repartir os esforços entre os dormentes [11]. Estes são

devido ao deslocamento do veículo, mas também a eventuais choques assim como devido aos defeitos geométricos da roda, trilho ou da própria via. As linhas LGV na França utilizam o perfil de trilho UIC 60, em aço laminado, de massa linear de 60 kg/m, inclinação de 1/20 e distância entre trilhos de 1,435 m. O perfil em forma de champignon possibilita uma boa distribuição de tensões internas.

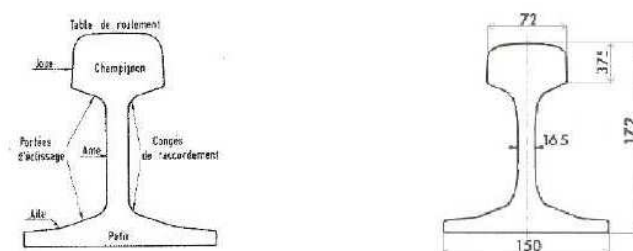


Figura 2 - Perfil trilho UIC 60

O lastro garante uma melhor distribuição dos esforços aplicados de forma concentrada pelos dormentes ao solo, sendo também responsável por:

- amortecimento de vibrações,
- ancoragem lateral e longitudinal graças à resistência ao cisalhamento entre o lastro e os dormentes ,
- drenagem da via,
- facilidade de operações de manutenção.

Ele deve possuir uma granulometria e limpeza especificadas a fim de garantir uma boa drenagem e propriedades mecânicas compatíveis. Além disso, os grãos devem possuir certa angularidade a fim de garantir boa resistência ao cisalhamento.

Uma irregularidade da via torna-se um defeito quando esta provoca uma redução do conforto no veículo através do aumento das acelerações, ou quando ela possibilita o aparecimento de sobrecargas dinâmicas levando a uma evolução do defeito e de suas zonas vizinhas. Os defeitos são causados pelo deslocamento vertical diferencial entre os dormentes, advindos de variações da rigidez da plataforma ou do deslocamento dos grãos do lastro, assim como da variação das forças dinâmicas impostas à via.

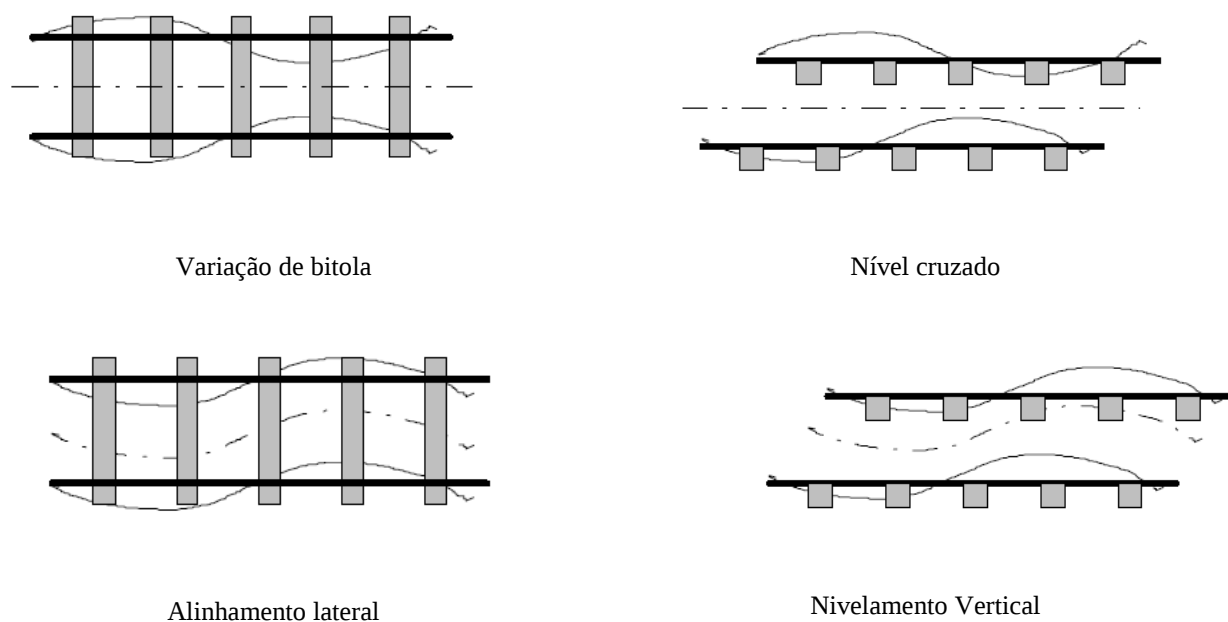


Figura 3 - Irregularidades da via férrea

A modelagem da via férrea tem por objetivo assegurar a segurança do tráfego e o conforto dos passageiros, otimizando os custos de manutenção da via. Diferentes métodos já foram propostos para compreender a deterioração da via e o fenômeno de compressão do lastro, assim como de prever a aparição de defeitos verticais e laterais da mesma. Os modelos têm tendência a privilegiar uma parte dos diferentes sub problemas ligados à degradação da via (contato roda trilho, deterioração das diferentes camadas da via) e a fazer hipóteses simplificadoras para as outras. A compressão do lastro pode ser causado por diferentes mecanismos do comportamento do lastro e da via [12]:

- Penetração de solo entre os grão do lastro, reduzindo a altura de sua camada e posição na via,
- Densificação da camada devido a um rearranjo dos grãos,
- Mudança na forma dos grãos devido às fortes tensões localizadas nos pontos de contato entre grãos, podendo causar sua ruptura,
- Comportamento não elástico após aplicação de carga,
- Migração dos grãos do lastro sob o dormente para regiões de menores tensões,

- Movimento lateral e/ou longitudinal de dormentes podendo causar a saída de grãos do lastro sob o dormente, causando um deslocamento vertical do mesmo.

Métodos experimentais e numéricos já foram propostos para este estudo. Dentre os resultados experimentais importantes podemos ressaltar o trabalho de Prud'homme, que foi um dos primeiros a estudar este sistema e que propôs a seguinte regra, adotada até hoje pela norma UIC:

$$L = 1,5 + P/3 \quad (1)$$

onde L é a resistência lateral e P o peso por rodeiro. Pela norma, o veículo não deve exercer sobre a via esforços maiores do que o limite de elasticidade da mesma, sem deformá-la além de um limite aceitável. Outros a estudarem de maneira experimental o comportamento da via foram Shenton, Oviedo, Guérin et Boudin.

Para modelar de maneira rigorosa o comportamento da via, precisa-se considerar o comportamento de seus diversos componentes, a geometria do sistema e os diferentes carregamentos possíveis. Atualmente, dois tipos de modelagem são efetuadas, pelo métodos dos elementos finitos e dos elementos discretos.

O método dos elementos finitos considera o meio granular como um meio contínuo, para o qual a dimensão do domínio é suficientemente grande face o tamanho das partículas. Este método permite tratar sistemas de grande tamanho, mas não é adaptado à descrição de seu comportamento na escala do grão do lastro. Para utilizá-lo, uma lei de comportamento representando a relação entre tensão e deformação deve ser aplicada. Os parâmetros desta lei de comportamento são determinados a partir de ensaios em laboratório.

Utilizando o banco de ensaios BETTER (*Ballast: Etude du Tassement Transversal à Echelle Réduite* – Lastro: Estudo da Compressão Transversal à Escala Reduzida), Boudin [13] propôs um modelo em elementos finitos para descrever o comportamento não linear do lastro, mostrado na Figura 4. Este foi considerado como sendo a superposição de duas camadas distintas, uma de grande rigidez e outra

de baixa rigidez. Os resultados obtidos através deste modelo são comparáveis aos obtidos em ensaios na via.

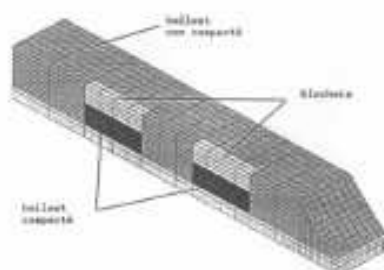


Figura 4 - Modelo de malha em elementos finitos utilizado por Bodin

O estudo do comportamento dinâmico da via colocou em evidência a dependência da velocidade de passagem do trem nas vibrações ressentidas pela mesma. Vários trabalhos foram feitos para caracterizar o comportamento de um massivo quando da passagem de uma carga móvel, como o trabalho de Nguyen. Ele mostrou que as discontinuidades do lastro levam a não linearidades na propagação das ondas no mesmo. Através de um modelo de várias camadas visco-elástico tridimensional, em elementos finitos, ele mostrou também a influência da velocidade e da elasticidade do meio na propagação de ondas.

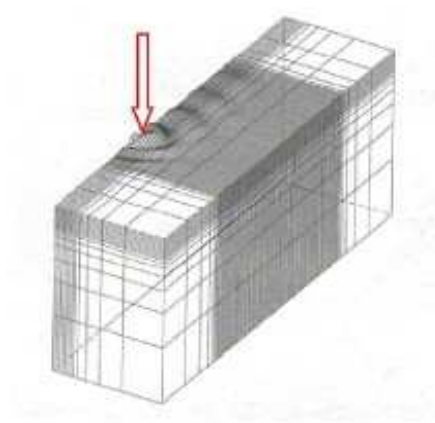


Figura 5 - Propagação de onda em um massivo tridimensional para uma carga vertical móvel

O método dos elementos discretos tem a particularidade de tratar cada grão de maneira independente, considerando-os como corpos rígidos ou deformáveis com um

número finito de graus de liberdade. Ela já é utilizada no estudo de estruturas de maçonaria ou no papel do atrito e da rede de forças em conjuntos granulares, por exemplo. Existem diversos métodos de resolução do problema de interação entre grão rígidos, as duas principais sendo Molecular Dynamics e Contact Dynamics.

O método Molecular Dynamics considera os grãos rígidos, mas com uma camada exterior deformável. Ele permite quantificar a força no contato segundo a interpenetração de dois sólidos, utilizando uma lei de comportamento no contato. Se inicialmente os grãos eram representados através de círculos ou esferas, como no modelo proposto por Mendes [14], atualmente o lastro pode ser representado por polígonos e poliedros convexos. Diversas leis de comportamento do contato já foram propostas, como a lei de Hertz para contato elástico com atrito. No entanto, este método é muito lento em tempo de cálculo, não sendo adaptado para sistemas tendo um grande número de grãos.

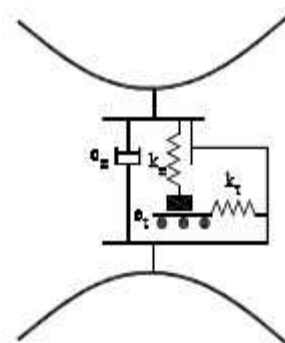


Figura 6 - Modelo de contato para Molecular Dynamics

O método Contact Dynamics é caracterizado pela descrição da interação intergranular através de leis de limite, leis de choque e condições unilaterais, como as leis de Signorini no contato. A equação do movimento das partículas é resolvida de maneira implícita, diferentemente do método Molecular Dynamics. Com isso, utiliza-se passos de integração maiores e o tempo de resolução é menor.

Uma primeira validação deste método para o uso ferroviário foi feito por Gaël Combe. Ela simulou carregamentos cíclicos sobre um massivo granular. Os fenômenos de recirculação de grãos e movimento do dormente puderam ser

observados. Os valores de compressão da camada de lastro obtidos são comparáveis aos observados na via. No entanto, duas dificuldades foram observadas:

- A precisão do cálculo, que depende diretamente da interpenetração dos grãos. Deve-se ser muito exigente neste parâmetro para obter-se resultados coerentes,
- Tempos de cálculo longos, porém ainda inferiores ao método Molecular Dynamics.

Saussine [15] utilizou o mesmo método na modelagem dos grãos do lastro e no estudo do comportamento de uma camada da via para solicitações verticais e laterais. A rotina desenvolvida foi validada a partir de comparações com resultados experimentais.

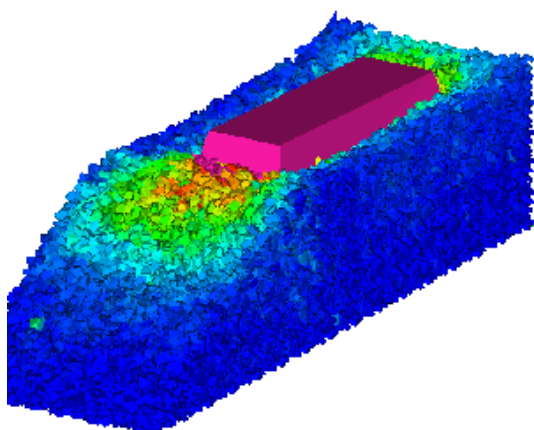


Figura 7- Visualização de modelo de via em elementos discretos comportando lastro e dormente

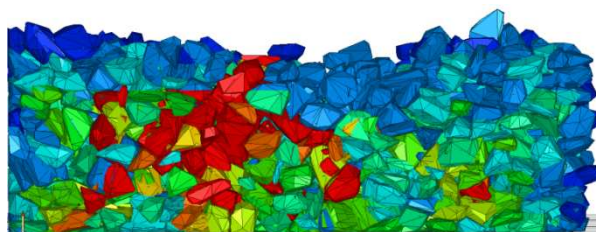


Figura 8 - Visualização de um corte vertical da camada de lastro

1.2 Estrutura do veículo ferroviário

O veículo ferroviário pode ser globalmente classificado segundo seu uso: transporte de passageiros ou transporte de carga. Algumas características são específicas segundo a aplicação. No caso de veículos de passageiros (Figura 9), a direção do rodeiro e a suspensão primária fazem a ligação elástica vertical e horizontal entre os rodeiros e a estrutura do truque, em H rígido. A direção do

rodeiro assegura o alinhamento no trilho juntamente com os perfis da roda do rodeiro. A suspensão primária representa o primeiro nível de molas.

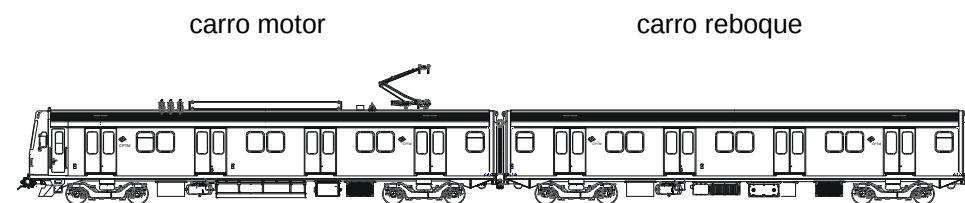


Figura 9 - Veículo ferroviário para transporte de passageiros

Os rodeiros são ligados com a estrutura do truque elasticamente e sem folga através da guia do mancal do eixo. A guia da direção do eixo é admitida por elementos de borracha no sentido longitudinal e transversal.

As suspensões primárias estão dispostas diretamente sobre os mancais do rodeiro, entre as guias do eixo e a estrutura do truque. As suspensões primárias são executadas com molas de pressão helicoidais de aço. O nível primário é separado da caixa do mancal do rodeiro com elementos de borracha para executar o isolamento acústico e elétrico.

Para limitação do percurso da mola, existem batentes e uma segurança contra levantamento entre guia do mancal do eixo e estrutura do truque

Para os truques usados em veículos de transporte de carga, o rolamento do rodeiro está diretamente ligado ao esqueleto do truque. Neste caso, os elementos elásticos anteriormente citados estão presentes apenas para os movimentos verticais. Um exemplo deste tipo de truque é apresentado na Figura 10.

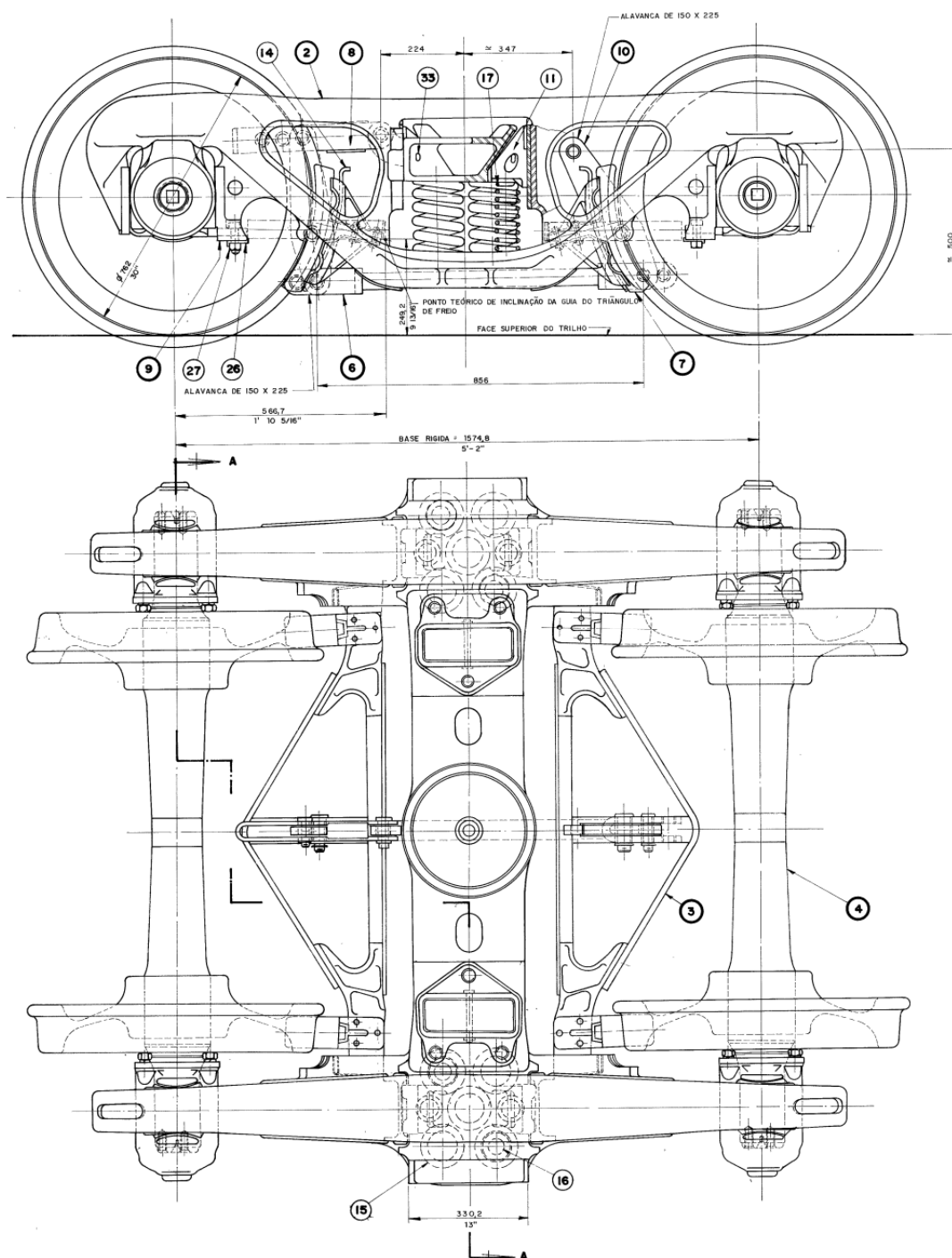


Figura 10 - Estrutura do truque ferroviário de carga Baber

1.3 Mecânica do Contato Roda/Trilho

Quando um corpo deformável é pressionado contra outro corpo deformável, com força normal atuando entre ambos, é formada uma área de contato. Esta é normalmente considerada muito menor do que as dimensões de cada um dos corpos e do raio de curvatura envolvido, sendo este constante no interior da área de contato. Neste caso, considerando-se os materiais em regime elástico, a área de contato pode ser obtida através da teoria de Hertz. Ela tem formato elíptico, sendo a distribuição das pressões normais ao contato entre roda e trilho de forma semi-elíptica.

Se estes dois corpos forem rotacionados sobre seus eixos, de forma que um role sobre o outro, as suas velocidades tangenciais no ponto de contato não serão mais as mesmas. Este fenômeno é chamado escorregamento v (creep), e foi inicialmente introduzido por Carter para explicar o mecanismo da dinâmica lateral do rodeiro ferroviário [16]. O escorregamento entre dois corpos em uma dada direção é definido como sendo a diferença da velocidade tangencial de cada corpo no ponto de contato, dividido pela velocidade média [17]. Adicionalmente, define-se o escorregamento spin como sendo a velocidade angular normal relativa entre ambos os corpos, também dividida pela velocidade média.

Uma expressão geral para dois corpos rolando um sobre o outro pode ser dada pelas seguintes expressões [18]:

$$\text{Longitudinal:} \quad v_x = \frac{\text{proj.}/x(\vec{V}_0 - \vec{V}_1)}{\frac{1}{2}(\vec{V}_0 - \vec{V}_1)} \quad (2)$$

$$\text{Lateral:} \quad v_y = \frac{\text{proj.}/y(\vec{V}_0 - \vec{V}_1)}{\frac{1}{2}(\vec{V}_0 - \vec{V}_1)} \quad (3)$$

$$\text{Spin:} \quad \omega_z = \frac{\text{proj.}/z(\vec{\Omega}_0 - \vec{\Omega}_1)}{\frac{1}{2}(\vec{\Omega}_0 - \vec{\Omega}_1)} \quad (4)$$

No caso de contato Hertziano, as forças no contato são funções dos escorregamentos próximos ao ponto de contato. Nos anos 60, Kalker [3] desenvolveu completamente a teoria que permite calcular, conhecendo-se as velocidades relativas,

as forças no contato. A expressão geral das forças no contato da Teoria Linear de Kalker é a seguinte:

$$F_x = -Gabc_{11}v_x \quad (5)$$

$$F_{y_{yaw}} = -Gabc_{22}v_y \quad (6)$$

$$F_{y_{spin}} = Gabc_{23}c\varphi \quad (7)$$

onde G é o modulo de cisalhamento do material, πab é a área de contato elipsoidal, c_{ij} são os chamados coeficientes de Kalker e $c = \sqrt{ab}$. Estes são funções da razão b/a da elipse de contato e do coeficiente de Poisson do material. Para o contato roda/trilho, o seguinte polinômio é proposto [18]:

$$c_{11} = 3.2893 + \frac{0.975}{b/a} - \frac{0.012}{b/a} \quad (8)$$

$$c_{22} = 4.4014 + \frac{1.3179}{b/a} - \frac{0.02}{(b/a)^2} \quad (9)$$

$$c_{23} = 0.4147 + \frac{1.0184}{b/a} + \frac{0.0565}{(b/a)^2} - \frac{0.0013}{(b/a)^3} \quad (10)$$

Para casos em que o spin é pequeno, pode-se considerar que a força lateral total é a soma das forças laterais causadas pelo escorregamento lateral e o spin, descritas acima. No entanto, quando o efeito spin não pode ser negligenciado, estas expressões não são mais válidas, pois o efeito combinado não é mais uniforme. Nestes casos; um modelo de contato baseado em uma descrição da superfície deve ser utilizado.

Três parâmetros são de importância fundamental para a determinação da posição do ponto de contato:

- Ângulo do plano de contato δ
- Raio de rolamento r
- Ângulo de rolamento ω

Como salientado por Barbosa [17], o ângulo de contato determina a direção das forças laterais presentes no contato roda/trilho e a diferença dos raios de rolamento determinará os escorregamentos longitudinais. Além disso, a curvatura no ponto de contato (tanto para a roda quanto para o trilho) varia segundo o raio de rolamento e irá determinar as dimensões a e b da elipse de contato.

Para cada par de perfis roda/trilho, podem-se determinar previamente estas propriedades, em função do deslocamento lateral do rodeiro. Com isso, aumenta-se a velocidade da simulação numérica. Para um ângulo de ataque do rodeiro diferente de zero, a geometria do contato torna-se tridimensional e há um deslocamento longitudinal do ponto de contato, fazendo variar as propriedades do contato anteriormente determinadas.

1.4 Modelo de contato - FASTSIM

Kalker desenvolveu diversos métodos de resolução de problemas de contato [3], sendo FASTSIM um dos mais usados no meio ferroviário, devido a sua rapidez de cálculo e boa aproximação de resultados. Programas comerciais, tais como VAMPIRE e NUCARS [19] utilizam tabelas pré-calculadas com resultados baseados nesta rotina. A superfície de contato é descrita em tiras na direção de rolamento, como mostrado na Figura 11. Para cada elemento, são calculadas as forças elementares e pressão separadamente (esta definida pelo valor da elipse de pressão neste ponto). Estas são posteriormente integradas em toda a área de contato.

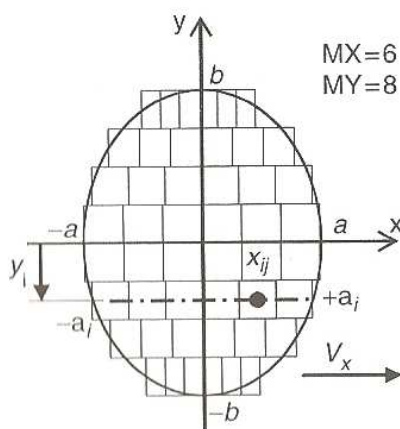


Figura 11 - Discretização por elementos utilizada por FASTSIM[12]

De um ponto de vista prático, devem-se calcular inicialmente os escorregamentos normalizados pelo carregamento (redução da elipse de contato para um uma circunferência de raio unitário), dados da seguinte maneira:

$$UX = \frac{0.589Gabc_{11}N^{1/3}v_x}{\mu N} \quad (11)$$

$$UY = \frac{0.589Gabc_{22}N^{1/3}v_y}{\mu N} \quad (12)$$

$$FIY = \frac{2Gabc_{23}\varphi}{\mu} \quad (13)$$

$$FIX = \frac{a}{b}FIY \quad (14)$$

O termo $N^{1/3}$ vem diretamente da normalização pelo carregamento. A fim de se obter a força no contato nas direções consideradas, devem-se multiplicar as forças de cisalhamento obtidas pelo FASTSIM pela força normal N aplicada e pelo coeficiente de atrito μ entre as superfícies.

1.5 Modelos de interação veículo - via

Alguns estudos visam caracterizar a influência do comportamento dinâmico da via férrea sobre a resposta do veículo, e vice-versa. Este tipo de estudo é bastante complexo, variando de acordo com o nível de detalhamento do modelo do veículo e da via. Habitualmente, simplifica-se um ou outro, dependendo do aspecto que se busca caracterizar com maior precisão. No entanto, o acoplamento da dinâmica vertical com a lateral e longitudinal, considerando-se o comportamento da via, ainda é um ponto aberto.

Programas de dinâmica ferroviária como o já citado VAMPIRE, privilegiam o comportamento do veículo. Neste caso, a via é caracterizada como uma viga de Euler apoiada sobre molas, estas de rigidez que caracterizariam o comportamento do conjunto dormente, sapatas, lastro e solo. Este é o modelo mais simples com o qual se pode caracterizar o comportamento da via.

Steenbergen [20] estudou a interação vertical do par roda / trilho, através de um modelo simples de via, apoiada sobre molas. O truque foi considerado fixo e o contato aproximado por uma rigidez de contato Hertziano, amplamente utilizado no meio ferroviário. O modelo pode ser visto na Figura 12. Steenbergen obteve um expressão analítica no domínio da frequência para deslocamentos do trilho, da roda e da força no contato. Com isso, estudou-se a influência de defeitos localizados no trilho e de soldas no comportamento dinâmico vertical da roda.

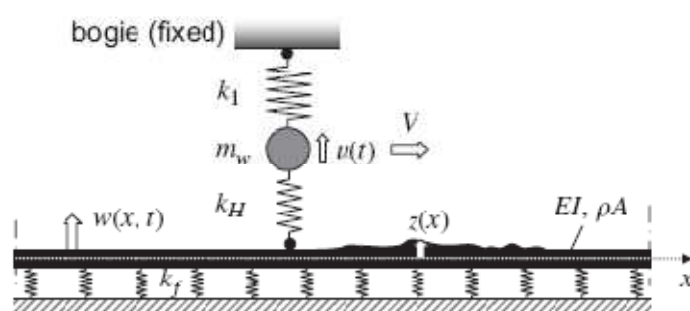


Figura 12 - Modelo de interação roda-trilho, com irregularidades geométricas no trilho

O modelo proposto por Liang [21] considera o veículo completo, com suspensão primária e secundária. A via é modelada por uma viga de Euler apoiada sobre molas com três estágios, dormente, lastro e camada de fundação. Cada um deste é resolvido através de uma malha em elementos finitos. O modelo completo pode ser visto na Figura 13. O acoplamento das equações do veículo e da via é resolvido através da compatibilidade de deslocamentos do veículo e da via, ao invés do uso da teoria de Hertz para cálculo das forças de contato.

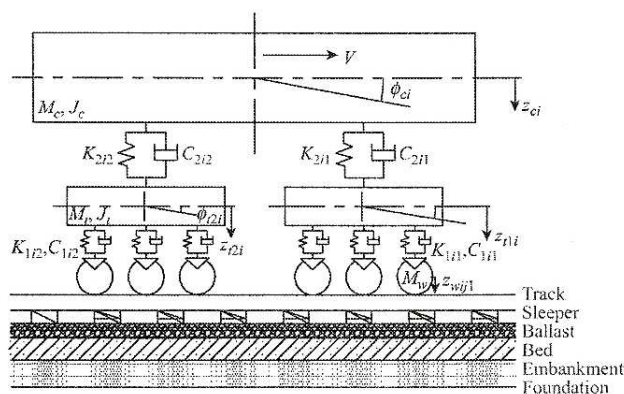


Figura 13 - Modelo acoplado veículo-via

Neste trabalho, nos reteremos ao problema da dinâmica do veículo ferroviário, sem considerar a dinâmica da via. Apesar de uma simplificação importante, pode-se obter resultados muito bons da dinâmica lateral do veículo com esse tipo de consideração. Além disso, como se pode observar ainda há muita divergência sobre a melhor caracterização da via, principalmente do lastro. Deve-se também considerar que pretende-se obter uma rotina de tempo real, objetivo muito longe de ser alcançado com modelos complexos acoplando veículo e via.

1.6 Critérios de segurança

A condição básica de segurança no transporte ferroviário é a de que nunca deve haver descarrilamento do veículo. No entanto, o mecanismo de descarrilamento do trem ainda é objeto de pesquisa, devido à complexidade do mecanismo de interação entre roda e trilho.

O primeiro a propor um critério de segurança relacionando as forças no contato foi Nadal, enunciado em 1908. Nadal propôs utilizar a relação entre força lateral L e vertical V no plano transversal da roda, para estabelecer um limite a partir do qual o trem estaria em situação de descarrilamento. Este é ainda o critério mais utilizado para prever o descarrilamento do veículo ferroviário. Na Equação 15, δ é o ângulo do plano de contato e μ o fator de atrito.

$$\frac{L}{V} = \frac{\tan \delta - \mu}{1 + \mu \tan \delta} \quad (15)$$

No entanto, o critério de Nadal possui um caráter conservativo, uma vez que não considera as forças de escorregamento longitudinais nem o ângulo de ataque do rodeiro. Alguns autores propuseram manipulações e fatores no critério L/V a fim de justificar valores obtidos em experimentos. Aspectos tais como: tempo de aplicação da força lateral, efeito cruzado lateral entre rodas, ângulo de ataque, momento e ângulo de rolagem e coeficiente de atrito foram estudados, como salientado por Zeng [22]. Barbosa [23] propôs um critério de descarrilamento 3D, considerando ângulo de ataque e as forças no contato na direção longitudinal. Este pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{L}{V} = \frac{A\mu - B \tan \alpha}{B + A\mu \tan \alpha} \quad (16)$$

Sendo:

$$A = k_x \sin \varphi + (1 + k_y) \cos \varphi \quad (17)$$

$$B = \sqrt{k_x^2 + 1 + 2k_y + k_y^2} \quad (18)$$

$$k_x = \frac{T_x}{T_L} \quad (19)$$

$$k_y = \frac{T_\omega}{T_L} \quad (20)$$

Esta proposição é compatível com o critério de Nadal, para o caso em que negligenciam-se forças longitudinais e ângulo de ataque. No entanto, considera a força transversal de escorregamento como sendo a soma das forças devido ao escorregamento lateral e spin, tal como na Teoria Linear de Kalker. Para grandes valores de spin, deve-se esperar uma não concordância entre os valores de força transversal.

1.7 Autolev

Autolev é um programa de computador para manipulação avançada de caracteres desenvolvido por Kane, T. R. e Levinson, D. A. [1]. Seu principal objetivo é possibilitar ao usuário ter a certeza de que todas as operações matemáticas associadas ao problema tratado (neste caso de modelagem de sistemas mecânicos) foram corretamente efetuadas. Exemplos são produtos vetoriais, cálculo da energia cinética do sistema, do momento angular ou das forças generalizadas. Além disso, ele possibilita ao usuário a obtenção de rotinas em linguagem Fortran, C ou Matlab para simulação numérica.

As equações de movimento de um sistema dado podem ser calculadas pelo próprio Autolev através do método de Kane. Pode-se classificar a abordagem de Kane como euleriana, pois se baseia em equações que descrevem o equilíbrio de um sistema de forças. Não é objetivo deste relatório explicitá-lo, este podendo ser

consultado em Kane [2]. No entanto, alguns pontos devem ser abordados para a compreensão e correta utilização da rotina.

Suponha um sistema S composto de Pi partículas se movimentando em uma base Newtoniana N, e seja Ri a resultante de todas as forças, sejam elas de contato ou não (como a força gravitacional) atuando em Pi. Definem-se como forças ativas generalizadas F_r para S em A como sendo:

$$F_r = \sum \overline{V_{Pi_N}} \cdot \overline{Ri} \quad (21)$$

onde $\overline{V_{Pi_N}}$ é a velocidade parcial de Pi em A, para tantas quantas foram as variáveis de estado associadas ao movimento de Pi. Uma interpretação física do conceito de velocidade parcial é a de que elas refletem as direções nas quais forças e torques realizarão trabalho, sendo portanto onde haverá movimento do sistema. Neste sentido o método de Kane é similar ao Princípio dos Trabalhos Virtuais de Jourdain, que estabelece que o trabalho virtual associado a uma força de restrição deve anular-se.

Para o mesmo sistema, definem-se como forças de inércia generalizadas F_r^* para S em N como sendo:

$$F_r^* = \sum \overline{V_{Pi_N}} \cdot \overline{Ri}^* \quad (22)$$

onde $\overline{Ri}^*$ é chamada de força de inércia de Pi em A, ou seja,

$$\overline{Ri}^* = -Mi * \overline{A_{Pi_N}} \quad (23)$$

com Mi a massa da Pi e $\overline{A_{Pi_N}}$ a aceleração de Pi em N. Finalmente, as equações dinâmicas de Kane assumem a forma:

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (24)$$

Estas equações governam os movimentos do sistema S em qualquer base de referência, uma vez F_r e F_r^* calculados em uma base Newtoniana.

2. MODELO MATEMÁTICO

Mesmo utilizando-se o programa AUTOLEV para obtenção das equações do movimento do veículo, deve-se inicialmente parametrizar o problema, os corpos e os referenciais utilizados de forma coerente e unívoca. Neste sentido, especial atenção foi dada à parametrização da via e dos planos de contato em cada uma das rodas. O cálculo dos escorregamentos também deve ser feito com cuidado.

Como estaremos interessados na dinâmica em baixas frequências do veículo, todos os corpos serão considerados rígidos, assim como a via, exceto a região próxima do contato. Esta é uma simplificação importante, e diversos autores [20], [21], [24] e [25] têm proposto modelos para resolução do problema conjunto da interação veículo / via, principalmente para investigar a influência de defeitos na via ou na roda na dinâmica vertical do veículo, como visto anteriormente.

As defleções do rodeliro devido à elasticidade do contato são desprezadas em relação ao movimento global do mesmo. O aparecimento de contato duplo das rodas com a via, tanto na região da pista de rolamento quanto no boleto, não será objeto do presente estudo. Além disso, foi assumido que roda e trilho estão em contato a todo instante.

A metodologia de uso de coordenadas de trajetória e coordenadas cartesianas apresentada por Shabana [4] é utilizada para parametrizar o movimento dos corpos. Coordenadas cartesianas são amplamente utilizadas para a resolução de problemas multicorpos. Estas permitem obter formas simples das equações do movimento. As coordenadas de trajetória são utilizadas em formulações da dinâmica do veículo ferroviário, já que estas permitem obter a trajetória do veículo na via de maneira simples. Esta mesma metodologia é utilizada por Pombo e Ambrósio [5] para obter um modelo do veículo ferroviário, usado no estudo de diferentes modelos de contato.

2.1 Modelo da Via

A via possui curvatura no plano horizontal com raio R_0 , superelevação ϕ_0 e pode ser deslocada localmente através de um deslocamento lateral y_0 . Seja ζ a curva que define a trajetória da via. Então:

$$\zeta : s \rightarrow (x(s), y(s), z(s)) \quad (25)$$

onde s é o parâmetro que define o deslocamento da via nas direções x , y e z . O vetor tangente é por definição:

$$\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \quad (26)$$

A parametrização do movimento do centro da base de referência junto à via em relação a um referencial newtoniano N , considera um deslocamento s a velocidade constante V , através do seguinte trio de equações:

$$\frac{dX}{ds} = \cos \Psi \quad (27)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \Psi \quad (28)$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = C = 1/R_0 \quad (29)$$

sendo OX sempre tangente à curva, OY radial, OZ mutuamente perpendicular e Ψ representado na Figura 14, onde é mostrado esquematicamente a inscrição em curvas de um vagão ferroviário completo. Neste caso, obtém-se $\dot{\Psi}$ da seguinte maneira:

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{V}{R_0} \quad (30)$$

Em um caso genérico, a pista pode ser de trajetória retilínea (de curvatura zero) ou trajetória curva. No caso de inscrição em curvas, obtém-se o gráfico da Figura 15. Vê-se que o parâmetro que diferencia um tipo de deslocamento do outro é apenas o

valor da curvatura da pista no ponto (ou instante) considerado. Curvas de variação de curvatura linear tais como apresentadas na Figura 15 são denominadas de *Clotoide*.

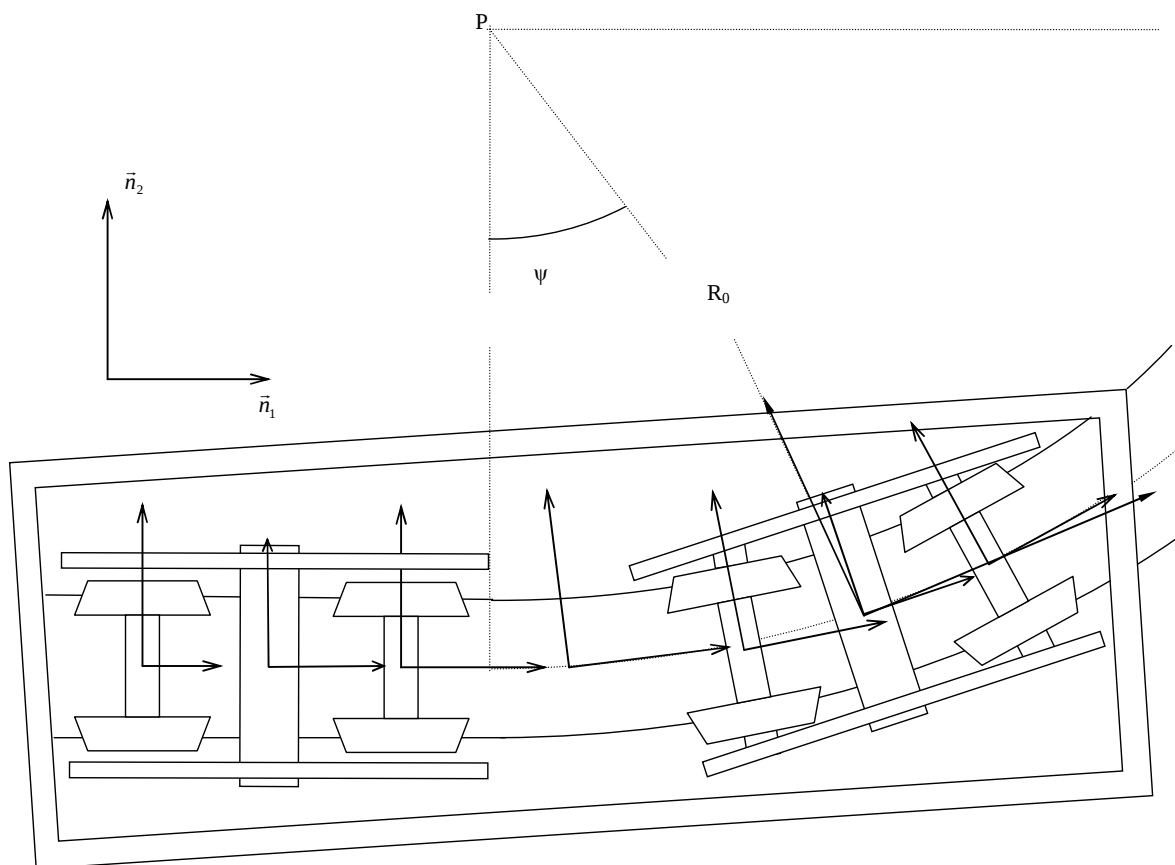


Figura 14 - Representação da via para o caso de inscrição do veículo ferroviário

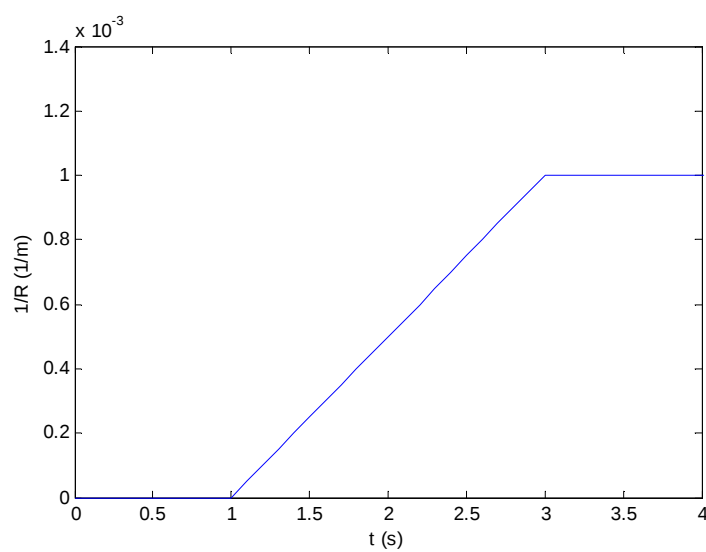


Figura 15 - Exemplo de trajetória de inscrição em curva de raio 1000m

A segunda derivada de X e Y em relação a Ψ , apresentada nas Equações 31 a 33, é necessária para a correta parametrização do movimento nos seguintes casos:

- Perfil de via curvo. Neste caso, apenas o termo de aceleração centrífuga é não nulo,
- Movimento acelerado (aumento/redução de velocidade do veículo imposta pelo condutor). Neste caso, V é a velocidade instantânea do veículo na direção tangente à via,
- Entrada e saída de curva. Neste caso, a conicidade varia e o termo $\frac{dC}{ds} \frac{ds}{dt}$ deve ser considerado.

$$\frac{d^2X}{ds^2} = \cos \Psi \frac{d^2s}{dt^2} - \sin \Psi \dot{\Psi} \frac{ds}{dt} \quad (31)$$

$$\frac{d^2Y}{ds^2} = \cos \Psi \dot{\Psi} \frac{ds}{dt} + \sin \Psi \frac{d^2s}{dt^2} \quad (32)$$

$$\frac{d^2\Psi}{ds^2} = \frac{dC}{ds} \frac{ds}{dt} + C \frac{d^2s}{dt^2} \quad (33)$$

Vê-se que o uso de coordenadas de trajetória leva a equações simples da trajetória imposta pela via ao veículo. Neste tipo de modelagem, deve-se impor a posição longitudinal de um dos corpos, geralmente do primeiro rodeiro, como salientado por Shabana [4].

A superelevação ϕ da via é a rotação da mesma em torno do seu próprio eixo. A característica de superelevação da via introduz um deslocamento angular adicional ao modelo apresentado. Ela auxilia a centralização e a estabilidade do veículo, uma vez que impõe um deslocamento lateral do baricentro e consequentemente um momento restituidor aplicado ao rodeiro, quando em curvas. Será utilizada a característica de superelevação apresentada na Figura 16. Ela é nula até curvas de raio 800m, e máxima para raio de 250m. A superelevação máxima utilizada é de $b/10$, sendo b a bitola da via. A taxa de variação segue a mesma de entrada e saída de curva.

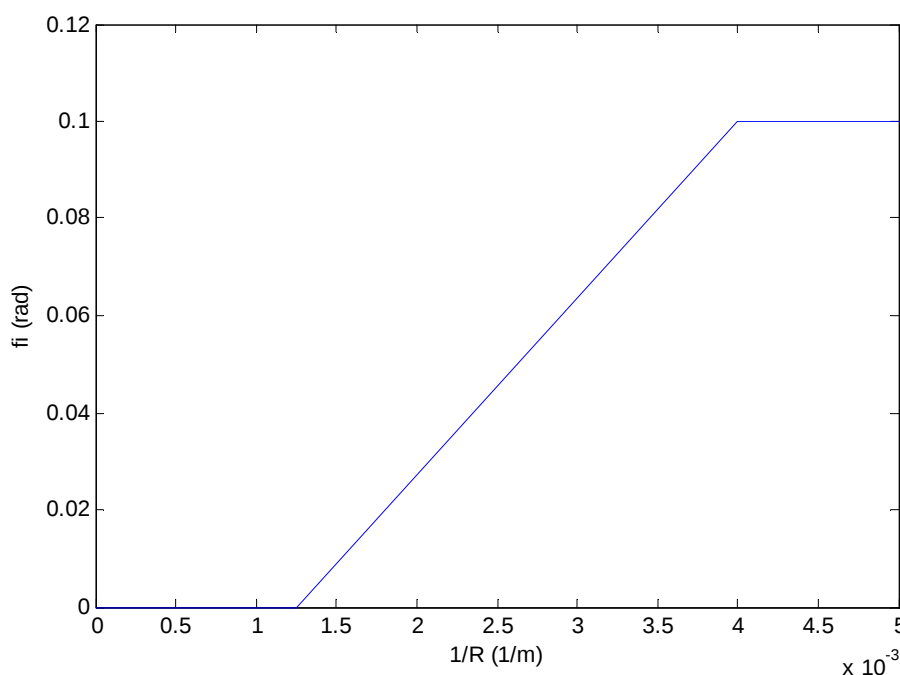


Figura 16 - Variação da superelevação ϕ da via segundo a curvatura

2.2 Modelo do rodeiro, truque e vagão

Tal como mostrado na parte 1.2, cada rodeiro é composto por um eixo e duas rodas solidárias a ele, de conicidades contrárias. Ele está ligado ao truque através da suspensão primária do veículo, presente nos três eixos. Uma rigidez torcional K_ϕ decorre do posicionamento das suspensões na direção x , tal que $K_\phi = K_x \cdot e_0^2$, que interfere de maneira decisiva na habilidade do rodeiro em resistir às forças laterais, como mostrados por Barbosa [7].

O veículo ferroviário de carga é composto de dois truques, um à frente e outro ao final do vagão. A suspensão secundária do veículo é conhecida como “prato de peão” e serve para isolar as massas suspensas da dinâmica das massas não suspensas. O veículo completo será portanto modelado por um sistema multicorpos com 7 corpos, sendo:

- 4 rodeiros,
- 2 truques,
- 1 vagão.

Ao centro de massa do rodeiro (considerado simétrico e regular) é fixada uma segunda base de referência, tal como mostrado na Figura 17. O rodeiro possui inicialmente seis graus de liberdade em relação à via: três deslocamentos lineares x , y e z , e três angulares φ (roll, rotação em torno de Ox), θ (rotação da roda) e ψ (yaw, rotação em torno de Oz). Estes são representados em um vetor de estado u de dimensão 6, respeitando a ordem apresentada.

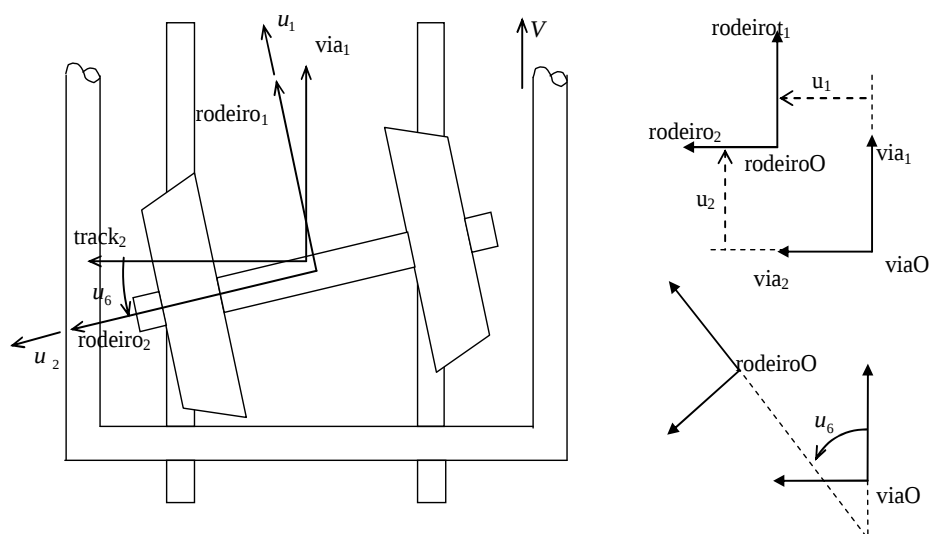


Figura 17 - Base de referência do rodeiro em relação à base da via

Como discutido por Whickens [16], a área de contato entre a roda e o trilho é pequena comparada com as dimensões da via. Além disso, devido à grande rigidez do contato, as deflecções normais do trilho são muito menores que os deslocamentos do rodeiro. Considera-se adicionalmente ponto de contato único para cada par roda / trilho. Com isso, duas equações de restrição aparecem, e poder-se-á eliminar duas equações dentre as coordenadas acima. Será conveniente eliminar o deslocamento vertical z e a rotação φ do rodeiro, tornando-as dependentes do deslocamento lateral y e do ângulo de ataque ψ . Como a velocidade de avanço V do veículo é considerada constante, o rodeiro possuirá apenas três graus de liberdade.

Para o caso de um truque ferroviário, ambos os rodeiros seguem a mesma metodologia de parametrização. O H rígido, diferentemente dos rodeiros, pode se deslocar livremente nos seis graus de liberdade em relação à via. O sistema multicorpos tratado é visualizado na Figura 18, sendo este simétrico em relação ao

plano de corte. O vagão, assim como o truque, é considerado livre nas 6 direções, estando ligado ao truque através da suspensão secundária. Suspensões primária e secundária são consideradas inicialmente lineares. No entanto, este é um vasto campo de estudo dentro do meio ferroviário, sendo esta é uma aproximação importante do modelo. Elementos com rigidez variável são utilizados principalmente em veículos de passageiros, para aumentar o conforto e reduzir as acelerações sentidas pela caixa. O prato de peão, contudo, é um exemplo de elemento com rigidez variável utilizado em veículos de carga.

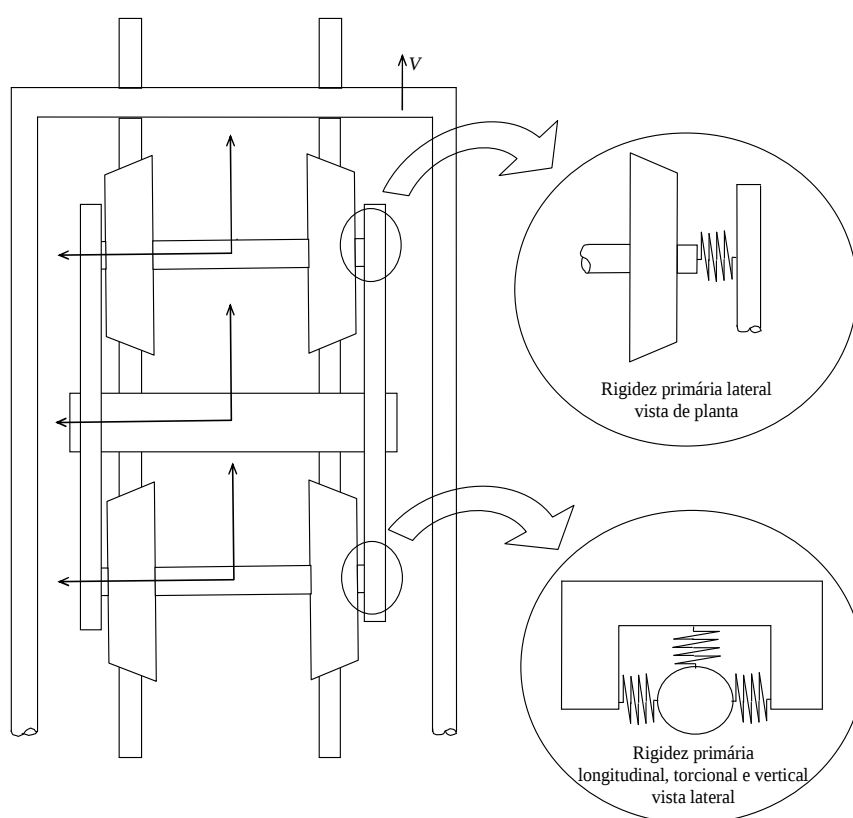


Figura 18 - Truque completo e suspensão primária

Uma base de referência foi considerada para cada ponto de contato. Elas são centradas no ponto de contato, sendo x^* e y^* no plano de contato, com x^* coincidente à x , e z^* o versor mutuamente perpendicular, como mostrado na Figura 19. Para a roda esquerda trata-se de uma rotação positiva e para a roda esquerda uma rotação negativa. Portanto, o sinal do ângulo do plano de contato já está sendo considerado na obtenção das equações.

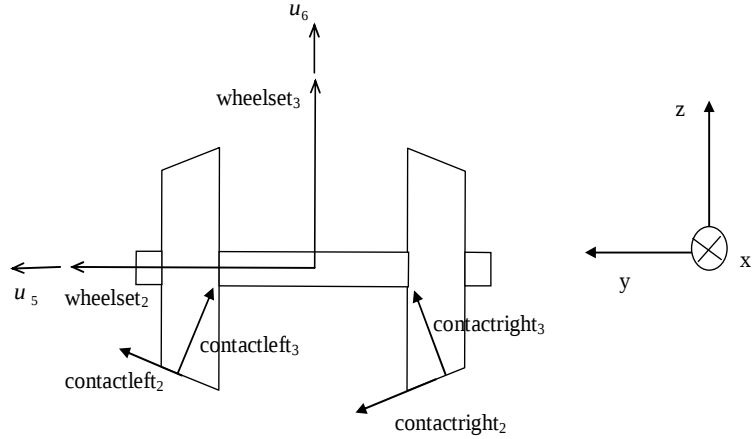


Figura 19 - Vetores do plano de contato roda/trilho

2.3 Escorregamento e forças no contato

Baseando-se na parametrização da via e do veículo apresentadas anteriormente, obtém-se os escorregamentos em cada uma das rodas através do programa AUTOLEV. Os principais resultados estão aqui apresentados, a listagem do programa estando disponível no Anexo 1.

Como mostrado na parte 1.3, os escorregamentos longitudinal, lateral e spin podem ser calculados a partir da diferença das velocidades tangenciais da roda e do trilho, o spin sendo o termo referente à diferença de velocidade rotacional entre ambos os corpos. Obtém-se, portanto, os seguintes termos para cada uma das rodas:

$$v_x^{left} = - \left[r_l \dot{u}_5 + L u_6 + \dot{\psi} (r_l u_4 - L) + \dot{\psi} u_2 - \sin \psi \frac{dy}{ds} - \cos \psi \frac{dx}{ds} + u_1 \right] / V \quad (34)$$

$$v_y^{left} = - \left[\dot{\phi} (u_3 + L u_4 - r_l) + \cos \phi \left(\sin \psi \frac{dx}{ds} - \cos \psi \frac{dy}{ds} \right) + u_6 (\dot{\psi} (L + r_l u_4) + L u_6 + r_l \dot{u}_5) - \dot{u}_2 \right] / V \quad (35)$$

$$\omega_z^{left} = - [u_5 \sin \lambda_l - u_6 \cos \lambda_l] / V \quad (36)$$

$$v_x^{right} = - \left[r_r \dot{u}_5 - L u_6 + \dot{\psi} (r_r u_4 - L) + \dot{\psi} u_2 - \sin \psi \frac{dy}{ds} - \cos \psi \frac{dx}{ds} + u_1 \right] / V \quad (37)$$

$$v_y^{right} = - \left[\dot{\phi} (u_3 - L u_4 - r_r) + \cos \phi \left(\sin \psi \frac{dx}{ds} - \cos \psi \frac{dy}{ds} \right) - u_6 (\dot{\psi} (L - r_r u_4) + L u_6 - r_r \dot{u}_5) - \dot{u}_2 \right] / V \quad (38)$$

$$\omega_z^{right} = [u_5 \sin \lambda_r + u_6 \cos \lambda_r] / V \quad (39)$$

Para trajetórias retilíneas, $\dot{\psi}=0$, $\dot{\phi}=0$ e as equações se simplificam. Em trajetória qualquer a velocidade constante V , $\dot{\psi} = V_i/R_i$, onde R_i é o raio de curvatura no instante considerado.

As forças no contato são discriminadas segundo roda e direção, estando no plano de contato. As propriedades do contato são obtidas com o auxílio do programa CCRT (Cálculo de Propriedades de Contato Roda / Trilho). Considerou-se uma roda de perfil S-1002 e trilho de padrão UIC-60. As propriedades do contato para este par estão descritas nas Figura 20, Figura 21 e Figura 22. Destas, percebe-se que o ângulo do plano de contato λ e o raio de rolamento variam com bastante intensidade para deslocamentos maiores que 4 mm, quando o friso da roda entra em contato com o trilho. Para este perfil, o descarrilamento ocorre para deslocamentos maiores que 6,17 mm, para os quais o rodeiro não mais apresenta capacidade de centralização. No entanto, deslocamentos maiores podem ser obtidos no caso do veículo ferroviário completo, uma vez que a suspensão do veículo pode atuar como elemento restituidor. Apesar disso, o descarrilamento será sempre considerado neste deslocamento máximo, condição que deve ser evitada.

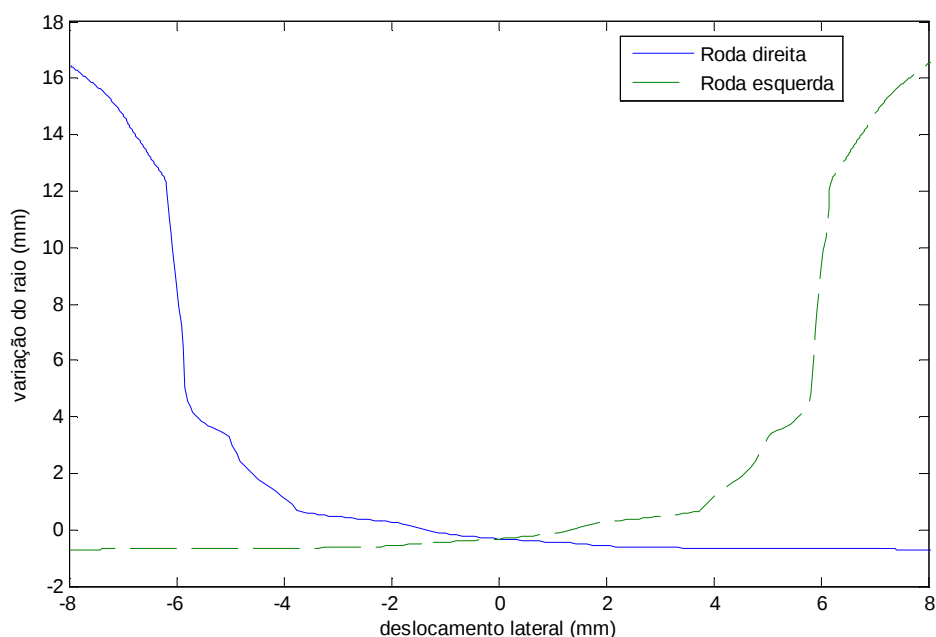


Figura 20 - Variação do raio da roda segundo um deslocamento lateral

Da Figura 22, vê-se que as dimensões da elipse de contato são bastante variáveis, mesmo na pista de rolamento, o problema do contato roda / trilho sendo fortemente não linear. Esta grande variação nas propriedades do contato acarretará um cuidado especial na integração numérica das equações do movimento, visto que para grandes deslocamentos as forças tangenciais desenvolvidas no contato são elevadas. Além disso, percebe-se que este perfil não é estável para pequenos deslocamentos. No caso de um rodeiro livre (sem suspensão primária), este irá apresentar passeio na pista entre os dois picos da figura. Este tipo de fenômeno é conhecido como “hunting” e deve ser evitado, já que é fonte de instabilidade principalmente na inscrição em curvas.

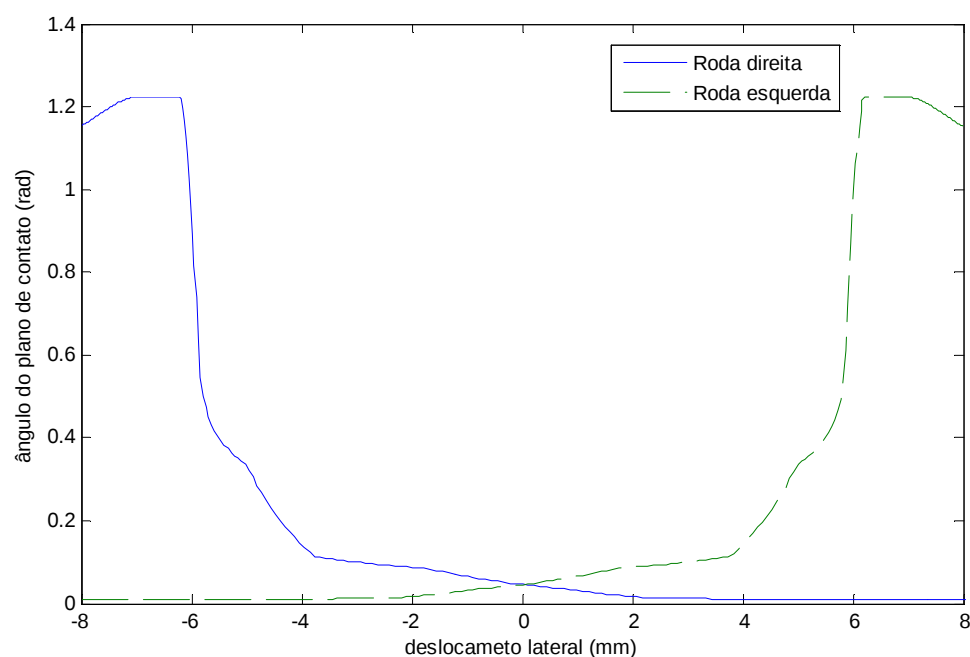


Figura 21 - Ângulo do plano de contato roda/trilho segundo um deslocamento lateral

Utilizando a rotina de cálculo desenvolvida por Kalker, FASTSIM, calculam-se as forças nos contatos a partir dos valores de escorregamento e da força normal ao contato. Os valores referentes à rigidez do contato G_{ab} já estão tabelados em função do deslocamento lateral. Estas são discriminadas de acordo com a direção de aplicação (1: x, 2: y e 3: z) e roda (direita ou esquerda). Os termos foram mantidos em inglês devido à possibilidade de utilização desta rotina por outros grupos de pesquisa.

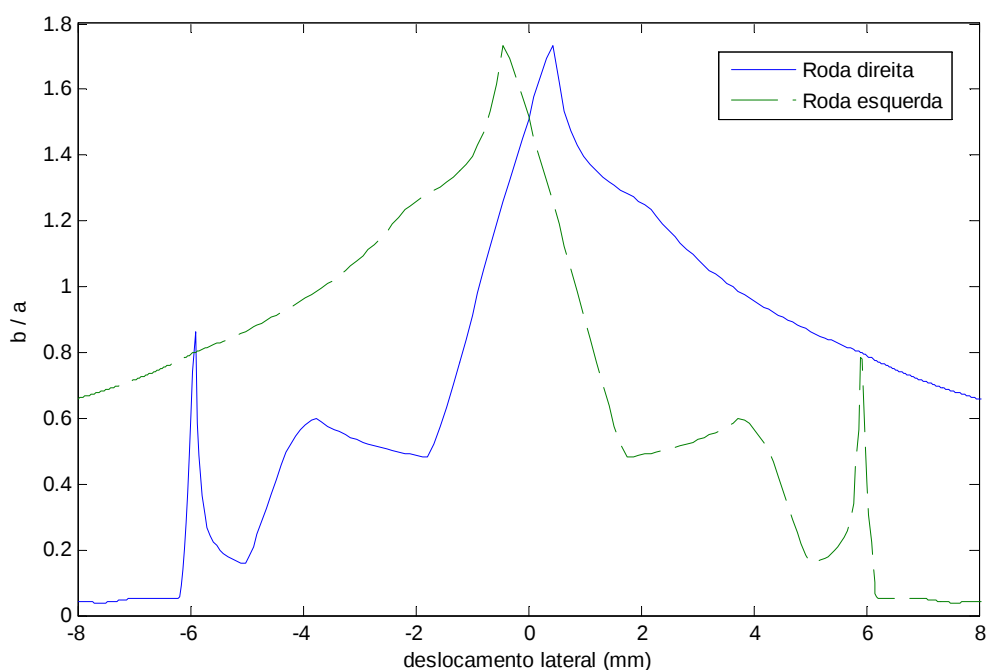


Figura 22 - Dimensões b/a da elipse de contato segundo um deslocamento lateral

Como mostrado por Shabana [6], duas formulações são amplamente empregadas para calcular a força normal no contato. A formulação por “Elastic Contact” calcula a força normal através da teoria de Hertz, permitindo separação do par roda / trilho. Esta metodologia é aplicada por Pombo e Ambrósio [5], permitindo o estudo do caso de contato duplo (tanto na pista de rolamento quanto no friso). Este fenômeno é principalmente encontrado nos casos de ângulo de ataque elevado. No entanto, a consideração de existência e unicidade do ponto de contato feita anteriormente nos permite calcular a força normal através do método chamado “Constraint Contact”. Neste, adicionam-se as equações de restrição ao problema tratado.

Inicialmente, decompõe-se as forças no contato Normal e Transversal em Lateral e Vertical. A força Vertical será calculada como sendo a necessária para manter a todo instante contato único em cada uma das rodas, através do cálculo do equilíbrio de forças na direção vertical e de momentos no rodeiro em relação ao seu centro de massa. Estas são justamente as direções escolhidas como dependentes do deslocamento lateral e do ângulo de ataque.

A resolução das forças verticais considera o problema estático: velocidades e acelerações não são consideradas. Além disso, não se considera o momento causado pela variação da posição do contato.

Para movimento retilíneo temos:

$$VL = \frac{Mg}{2} + \frac{P_y u_4}{2} - \frac{P_z}{2} - \frac{r_r}{2L} (Mgu_4 - P_y - P_z u_4) \quad (40)$$

$$VR = \frac{Mg}{2} + \frac{P_y u_4}{2} - \frac{P_z}{2} + \frac{r_l}{2L} (Mgu_4 - P_y - P_z u_4) \quad (41)$$

Na posição de equilíbrio e sem aplicação de força externa, $VR = VL$ como esperado. O termo de transferência de carga será:

$$LT_{r,l} = \mp \frac{r_{r,l}}{2L} (Mgu_4 - P_y - P_z u_4) \quad (42)$$

Para trajetória qualquer sem superelevação, teremos a seguinte expressão para cada uma das forças verticais:

$$VL = \frac{(B+Au_4)}{2} - \frac{r_r}{2L} \left[A + Bu_4 + M \left(1 - \frac{Lu_4}{r_r} \right) \left(\sin \Psi \frac{d^2 x}{ds^2} - \cos \Psi \frac{d^2 y}{ds^2} \right) \right] \quad (43)$$

$$VR = \frac{(B+Au_4)}{2} + \frac{r_l}{2L} \left[A + Bu_4 + M \left(1 - \frac{Lu_4}{r_l} \right) \left(\sin \Psi \frac{d^2 x}{ds^2} - \cos \Psi \frac{d^2 y}{ds^2} \right) \right] \quad (44)$$

$$A = P_y - Mu_2 \dot{\Psi}^2 + \dot{M}u_1 \ddot{\Psi} \quad (45)$$

$$B = Mg - P_z \quad (46)$$

Para o caso de curvatura constante sem variação de velocidade tangencial, o termo centrípeto se simplifica e obtemos:

$$F_{cent r,l} = \mp \frac{MV^2}{R} \left(1 - \frac{Lu_4}{r_{r,l}} \right) \quad (47)$$

Neste caso obtemos para o termo de transferência de carga:

$$LT_{r,l} = \mp \frac{r_{r,l}}{2L} (A + Bu_4 + F_{cent r,l}) \quad (48)$$

A força lateral é calculada como composição das forças normal e transversal. Uma vez estas calculadas, pode-se calcular as forças normais através da composição:

$$FN_R = VR \cos \lambda_r + LR \sin \lambda_r \quad (49)$$

$$FN_L = VL \cos \lambda_l - LL \sin \lambda_l \quad (50)$$

2.4 Integração numérica das equações do movimento do sistema multicorpos

As equações do movimento de cada um dos corpos, obtidas através da formulação apresentada até aqui, podem ser facilmente implementadas em uma rotina de integração numérica explícita. No entanto, deve-se ter muita atenção com o passo de integração utilizado, uma vez que o sistema é não linear e coloca em jogo altos valores de rigidez, tanto nos elementos de ligação entre os corpos quanto no contato.

Uma maneira de contornar tal problema é utilizar uma rotina de passo variável, como Range-Kutta de ordem 4, sugerida pelo Autolev. Com isso, o integrador tem a liberdade de utilizar passos de integração menores, garantindo melhor convergência do problema. No entanto, o tempo de cálculo com uma rotina de passo variável é consideravelmente maior do que com um método de integração de passo fixo, do tipo Euler, já que este efetua um número bem menor de operações num determinado tempo de simulação definido.

Foi escolhido para as simulações apresentadas um integrador de passo fixo Euler, sendo Δt definido a priori de 0,001s. Este é um valor coerente com a dinâmica do sistema e da solicitação imposta pela via. Com isso, busca-se poder utilizar a rotina em tempo-real, para aplicações de simulação com visualização gráfica, por exemplo.

As forças normais no contato são atualizadas a cada passo de integração, a partir das forças laterais e verticais calculadas no passo anterior. A dinâmica vertical do veículo não é considerada, a rotação ϕ do veículo é obtida previamente e tabelada

em função do deslocamento lateral, sendo a influência do ângulo de ataque desconsiderada. Para todas as simulações efetuadas, considerou-se pista sem defeitos. Se inicialmente sem superelevação, para o caso de inscrição em curvas, as simulações finais apresentam superelevação dada pela curva da Figura 16.

3. Simulações e Discussão

Diversas simulações foram efetuadas ao longo de todo o trabalho. Estas permitiram refinar o modelo e obter uma melhor compreensão do comportamento do sistema modelado.

Inicialmente utilizou-se o programa Matlab para integração das equações. No entanto, esta linguagem mostrou-se ineficiente quanto ao tempo de cálculo. Buscando obter-se uma rotina que trabalhasse em tempo real, para o sistema completo, passou-se a utilizar a linguagem C. O ganho em tempo de máquina foi considerável, o mesmo modelo que rodava 10 segundos de simulação em 3 horas, em um computador AMD Turion 64 1,7GHz com 2Gb de memória RAM, passou a ser calculado em apenas 160 segundos. As otimizações apresentadas na parte 3.3 permitiram chegar a um tempo de cálculo inferior ao tempo real.

3.1 Estudo de aplicação de força lateral no modelo de rodeiro

A fim de validar o modelo do rodeiro inicialmente obtido, uma simulação de descarrilamento a partir força lateral foi feita, baseada nos resultados obtidos por Barbosa [7]. A velocidade considerada é de 30m/s, para um rodeiro de massa 1887kg suportando uma carga vertical de 154715N. A rigidez da suspensão angular é de $8,16 \cdot 10^7$ mN/rad. O coeficiente de atrito μ considerado é de 0,6. A força lateral é aplicada no nível do rodeiro, não havendo força vertical transferida para a roda externa, crescente a uma taxa de 50kN/s a fim de se obter um movimento quase-estático.

Os resultados desta simulação são apresentados na Figura 23. As forças no plano de contato são apresentadas (longitudinal, transversal e normal), assim como as forças no contato projetadas na base de referência do rodeiro (lateral e vertical).

Percebe-se que a força vertical mantém-se constante a 86,5 kN durante toda a simulação.

As forças no contato variam bruscamente a partir do contato do boleto com o trilho (um pouco antes de 0,5 segundos). A força longitudinal aumenta, mantendo-se em seguida constante a 51kN. Enquanto o ponto de contato permanece na pista de rolamento, a força transversal diminui, tornando-se negativa. Quando há contato do friso com o trilho e consequentemente aumento do escorregamento spin, esta varia rapidamente, tornando-se novamente positiva. A força normal aumenta com o aumento do ângulo do plano de contato, devido à absorção de parte da força lateral aplicada ao rodeio. O ângulo de contato máximo é de 1,22 radianos (70°), a partir do qual se considera o descarrilamento do veículo. Como dito anteriormente, o veículo não mais possui condições de centralização e guidagem.

Para esta mesma simulação, a Figura 24 apresenta a distribuição das forças transversais e longitudinais, normalizadas pela força normal no mesmo instante. O círculo externo corresponde ao máximo de força tangencial disponível para o coeficiente de atrito considerado. Na condição de descarrilamento, para uma força normal de 147kN, a força tangencial máxima ou força de aderência disponível é de 88,2kN. Percebe-se que o ângulo entre as forças longitudinal e transversal, na condição de descarrilamento, é de aproximadamente 30°, a força lateral estando portanto a 50% do limite de saturação.

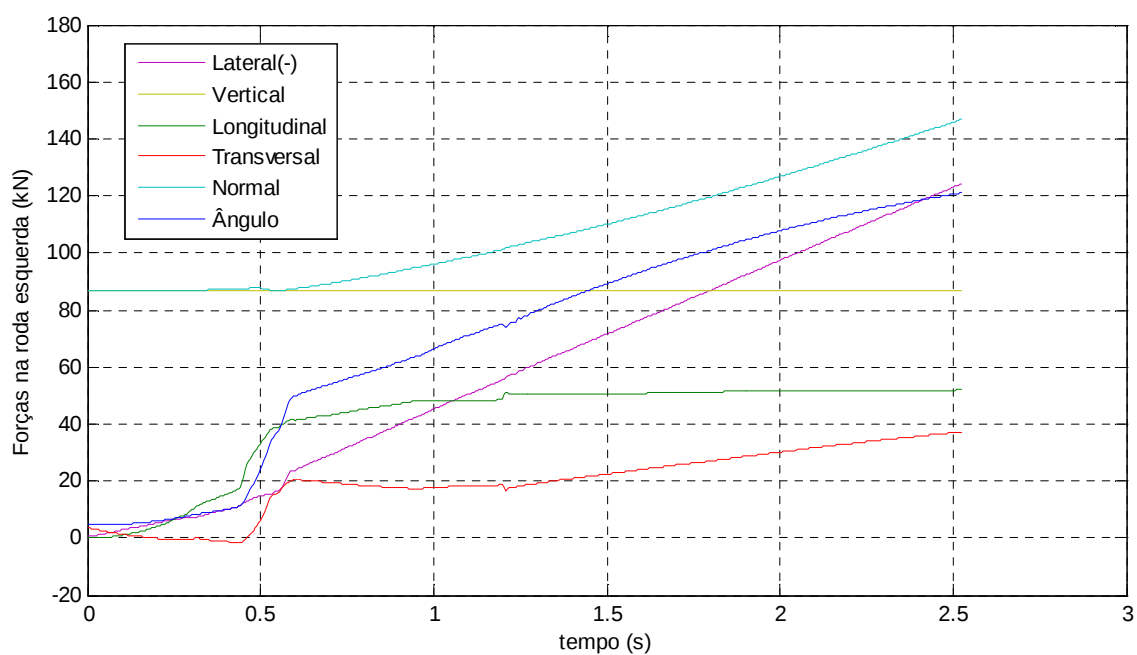


Figura 23 - Forças na roda esquerda para teste de descarrilamento

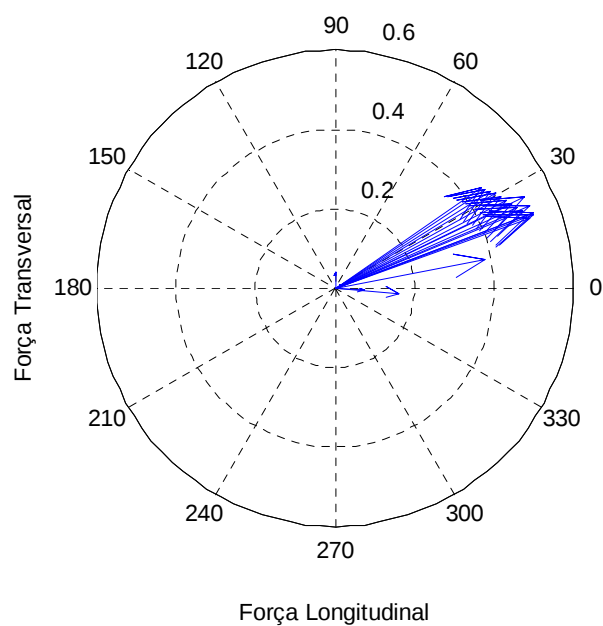


Figura 24 - Distribuição normalizada de forças lateral e longitudinal

O critério L/V também foi analisado para este caso, o gráfico está representado no Figura 25. Percebe-se que o valor atingido para o descarrilamento (1,43) é extremamente elevado. O valor pelo critério de Nadal para este perfil de roda e coeficiente de atrito é de 0,8. O critério de Nadal, como já discutido, possui um

caráter conservativo. A comparação com o critério 3D proposto por Barbosa [23] não é possível devido ao não desacoplamento da força de contato na rotina FASTSIM.

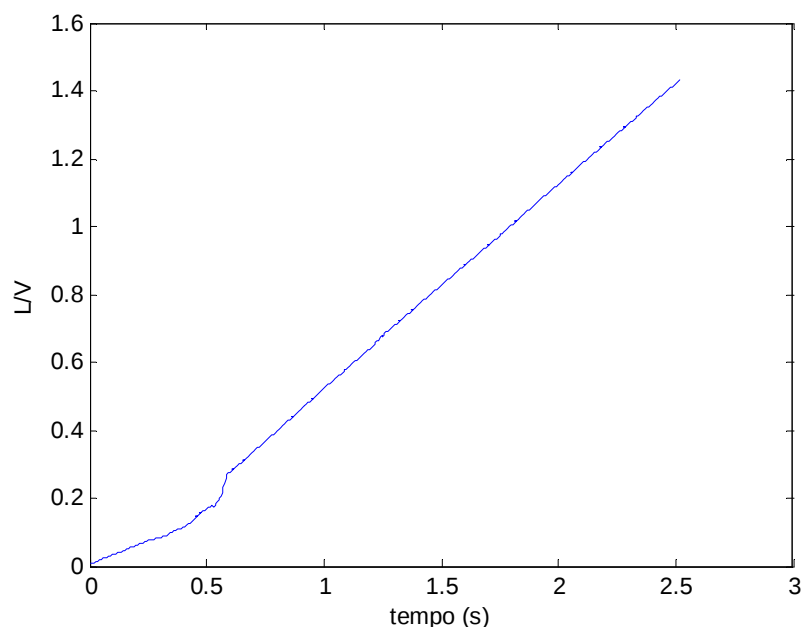


Figura 25 - Critério L/V para descarrilamento

3.2 Inscrição e saída de curva de pequeno raio para o veículo completo

Para o estudo do modelo completo, uma simulação de inscrição e saída de curva de pequeno raio foi efetuada. A velocidade considerada é de 30m/s, para um rodeiro de massa 1887kg suportando uma carga vertical de 154715N. O truque é considerado com massa de 3000kg. A rigidez da suspensão primária angular é de $8,16 \cdot 10^7$ mN/rad. A suspensão primária lateral é de $2 \cdot 10^7$ N/m e a secundária de 10^7 N/m. O coeficiente de atrito μ considerado é de 0,6. A trajetória imposta ao rodeiro segue a função $C(s)$ descrita na Figura 26. O raio da curva é de 250m, com inscrição e saída de 30m. Não se considerou transferência de carga neste exemplo.

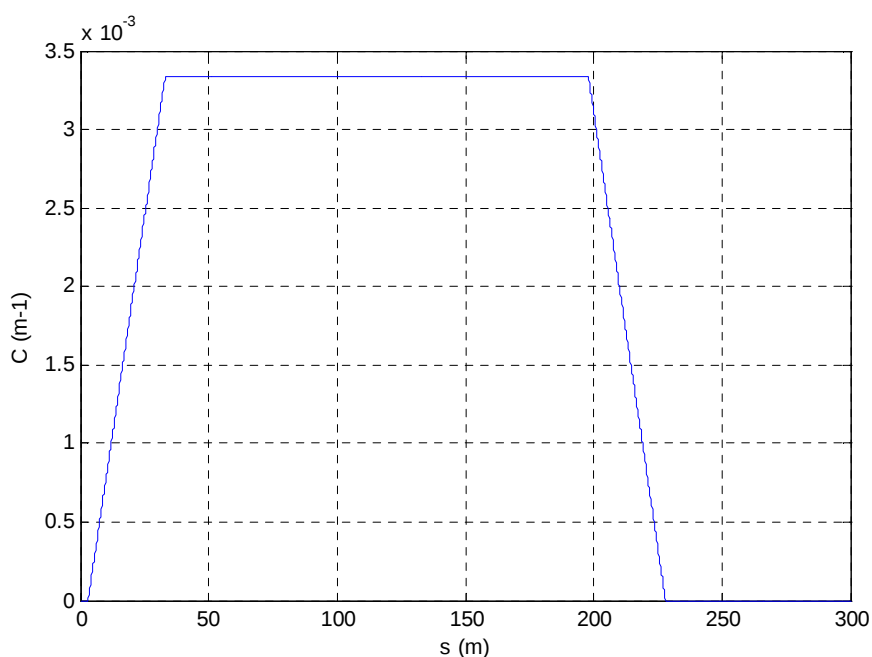


Figura 26 - Trajetória imposta ao veículo - entrada e saída de curva de pequeno raio

Os resultados do deslocamento lateral e angular de rodeiros e truques desta simulação são apresentados nas Figura 27 e Figura 28. Vê-se claramente que os rodeiros dianteiros de cada um dos truques possuem um grande deslocamento lateral, apresentando contato no friso da roda. Os rodeiros traseiros possuem deslocamento inverso aos frontais, seu comportamento em passeio na pista sendo determinado pela característica da suspensão primária. Os rodeiros frontais apresentam também uma posição angular de inscrição na curva muito desfavorável, com rotação negativa (e portanto de sentido contrário ao da curva). Os rodeiros traseiros são beneficiados da inscrição do rodeiro dianteiro na curva, e com isso se posicionam com ângulo de ataque positivo, tendo sua inscrição facilitada.

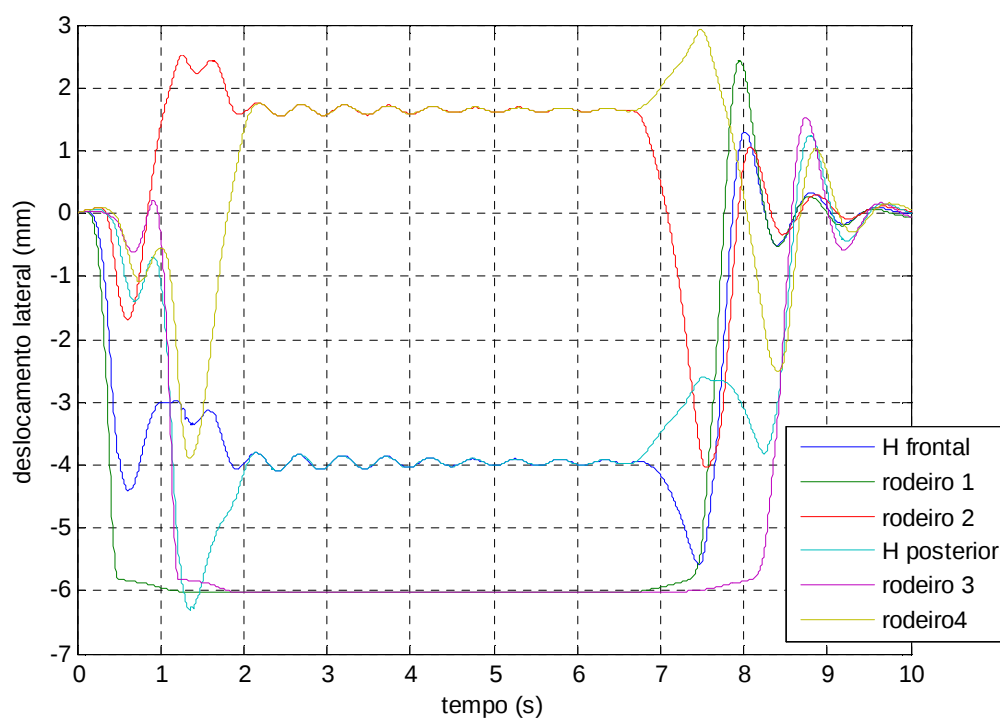


Figura 27 - Deslocamento lateral para entrada e saída de curva de raio 250m

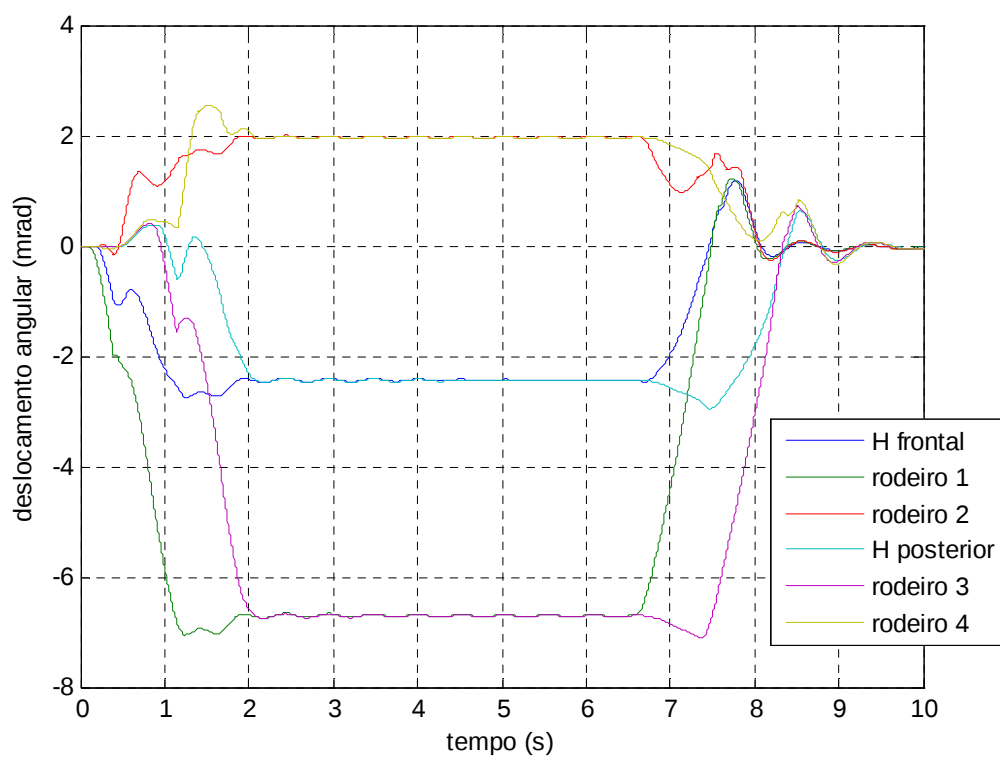


Figura 28 - Ângulo de ataque para entrada e saída de curva de raio 250m

Para o rodeiro frontal, as forças no plano de contato são apresentadas (longitudinal, transversal e normal), assim como as forças no contato projetadas na base de referência do rodeiro (lateral e vertical), para a roda direita (externa), na Figura 29. Percebe-se que a força vertical mantém-se constante a 94kN durante toda a simulação. Este é um resultado da não consideração de transferência de carga devido à força centrífuga. As forças tangenciais apresentam saturação a cerca de 40kN (tanto longitudinal quanto transversal), anteriormente ao final da inscrição na curva. Com isso, o rodeiro só apresenta capacidade de centralização com o aumento do ângulo do plano de contato. Este apresenta valor 60° na situação de raio constante, valor elevado e próximo do limite de 70° deste perfil de roda.

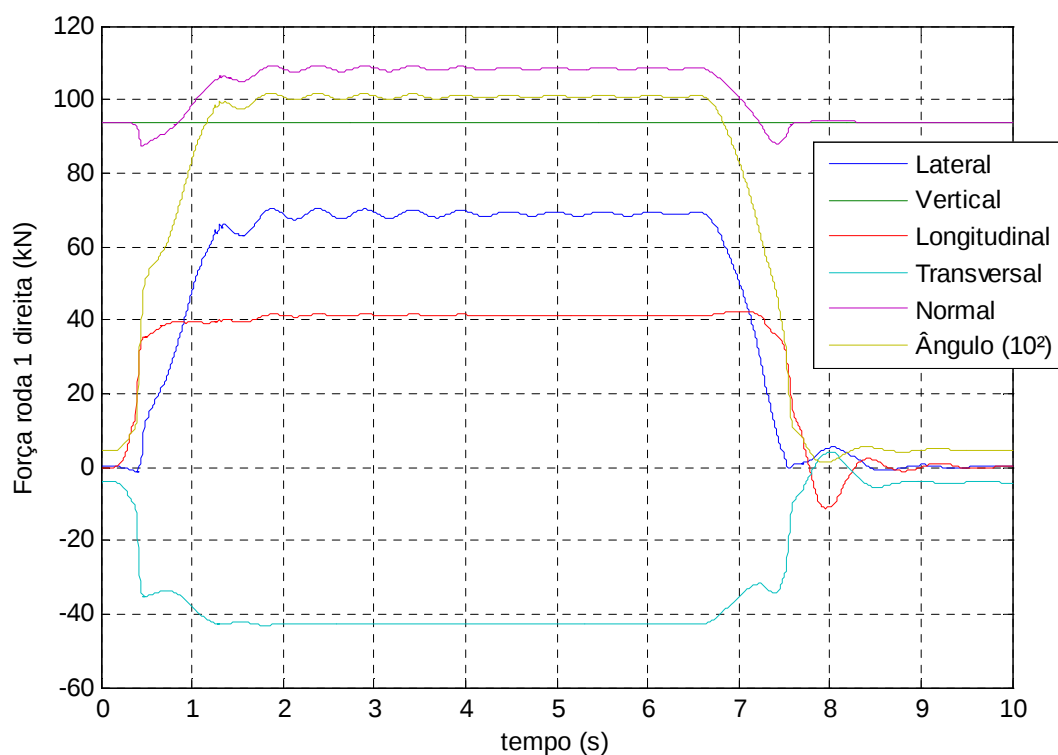


Figura 29 - Forças no contato da roda direita (externa) para rodeiro frontal

O índice de segurança L/V para as rodas dos rodeiros presentes no truque frontal é apresentado na Figura 30. Percebe-se claramente que a roda direita do rodeiro frontal é aquela que apresenta maior chance de descarrilar, como era esperado a partir dos resultados apresentados. No entanto, mesmo o índice L/V pelo

critério de Nadal ainda não foi atingido, mostrando que o veículo ainda possui capacidade de guidagem.

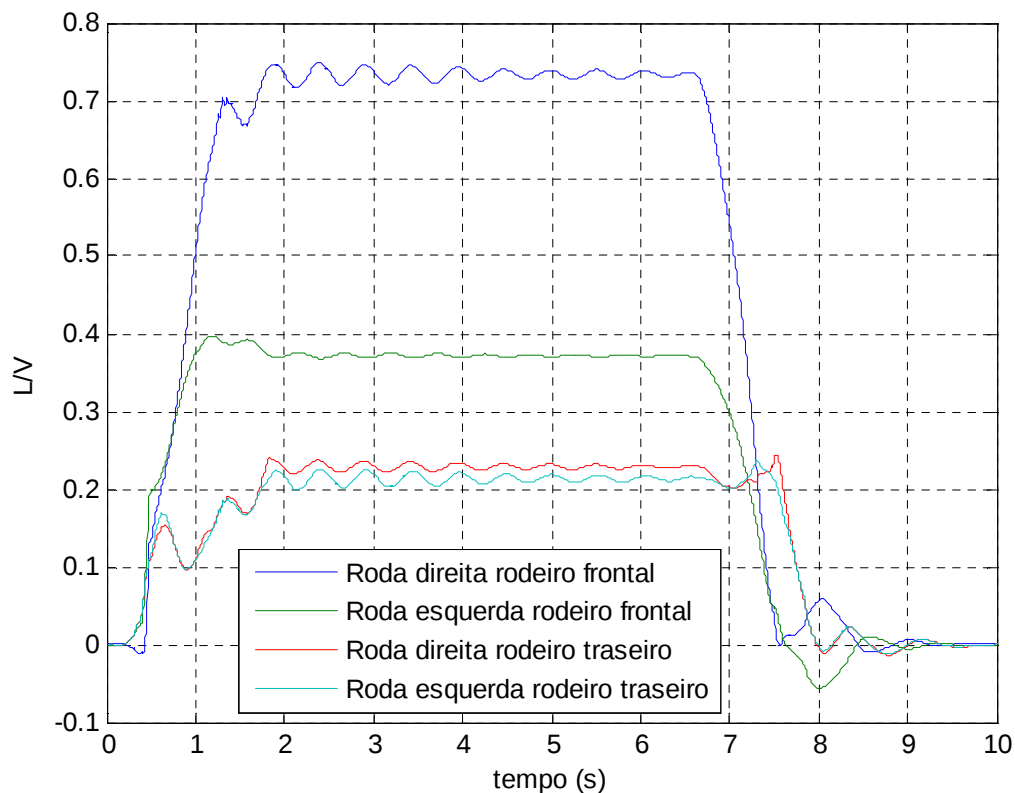


Figura 30 - Índice L/V para rodas do truque frontal

Observou-se uma perda na força de aderência máxima, assim como um deslocamento lateral mais importante para uma mesma força lateral experimentada pelo rodeiro para os casos de aplicação de força lateral em trajetória retilínea e inscrição em curvas. Isso advém da influência do termo de referencial acelerado sobre o escorregamento lateral e longitudinal.

3.3 Otimização dos parâmetros da rotina visando o tempo-real

Como já discutido, um dos objetivos deste trabalho é poder, a partir do modelo do veículo ferroviário proposto, obter uma rotina que possa ser utilizada para aplicações em tempo real. Para tanto, algumas otimizações procuraram ser efetuadas, tanto no código em si e na maneira como algumas funções são utilizadas, quanto no ajuste de parâmetros visando um menor tempo de processamento.

A primeira e mais óbvia otimização a ser feita é a chamada uma única vez de funções trigonométricas. Como o problema é tratado de maneira não linear, os deslocamentos angulares das suspensões são considerados e com isso as forças nas suspensões fazem chamado repetidamente às mesmas funções trigonométricas, com os mesmos ângulos. A utilização de uma variável adicional para cada função e ângulo tratado reduz o tempo geral de cálculo.

Outra operação que deve ser feita é a utilização de opções de compilação otimizadas pelo compilador. No caso deste trabalho, o compilador utilizado é o Dev C++ e o uso de opções de compilação otimizadas permitiu uma redução de 50% no tempo de execução da rotina.

Ainda não discutido até aqui, a discretização da área de contato pela rotina FASTSIM é um parâmetro importante tanto no valor obtido para força de contato (e portanto na estabilidade e confiabilidade do resultado) quanto no tempo de processamento. De fato, pode-se escolher uma discretização MX e MY qualquer, como mostrado na Figura 11. Uma malha muito fina irá levar a tempos de simulação elevados, enquanto que uma discretização grosseira acarretará em instabilidade devido a resultados pouco confiáveis. Deve-se portanto encontrar um valor para MX e MY para o qual obtenham-se bons resultados sem prejudicar o desempenho da rotina.

Para verificar a variabilidade de resultados e de tempo de simulação com a variação deste parâmetro, duas simulações são propostas. Para ambas, pares de valores de discretização partindo de 2 a 10 foram utilizados. O par 20x20 foi considerado como o valor balizador e a partir do qual não ocorrem mais variações significativas na força de contato.

Inicialmente, uma simulação de inscrição em curva de raio 800m e velocidade de 15 m/s foi efetuada. Esta é exemplificadora de uma solicitação moderada e muito comum na via férrea. A Figura 31 apresentam resultados de deslocamento lateral para rodeiro frontal e posterior do truque frontal para valores particulares do par MX e MY. A Figura 32 apresenta o comportamento das forças no contato para os

mesmos valores de MX e MY. Finalmente, a Figura 33 resume os resultados em função do erro porcentual em relação à simulação com MX e MY iguais a 20.

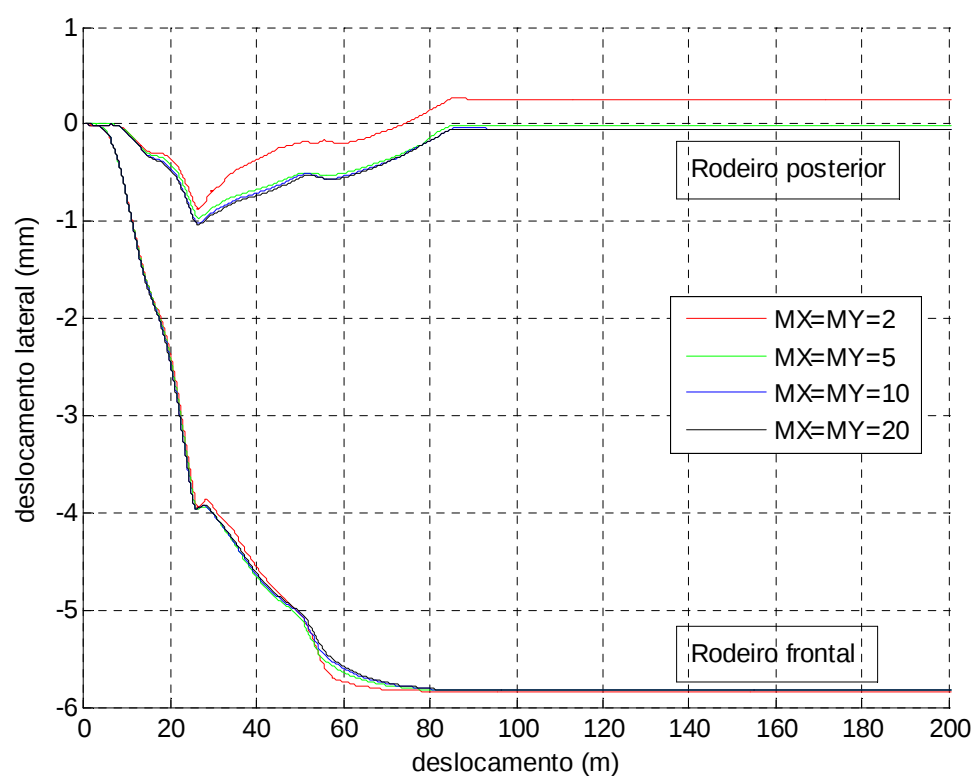


Figura 31 - Deslocamento lateral dos rodeiros frontal e posterior do H frontal

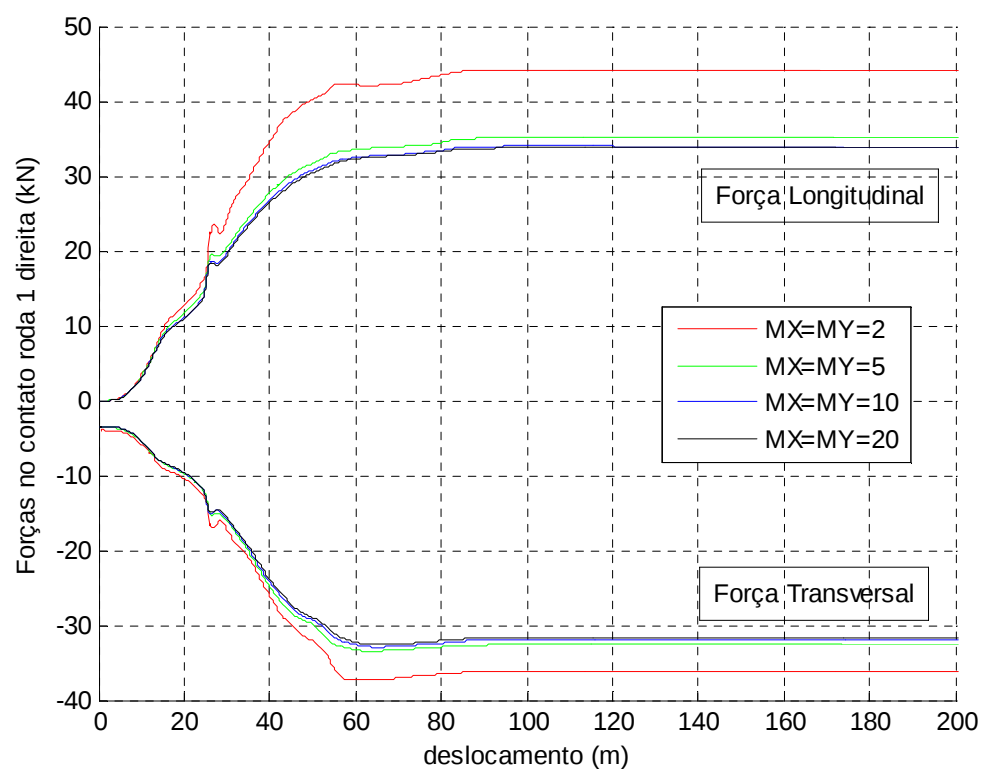


Figura 32 - Forças no contato para roda direita (externa) do rodeiro frontal

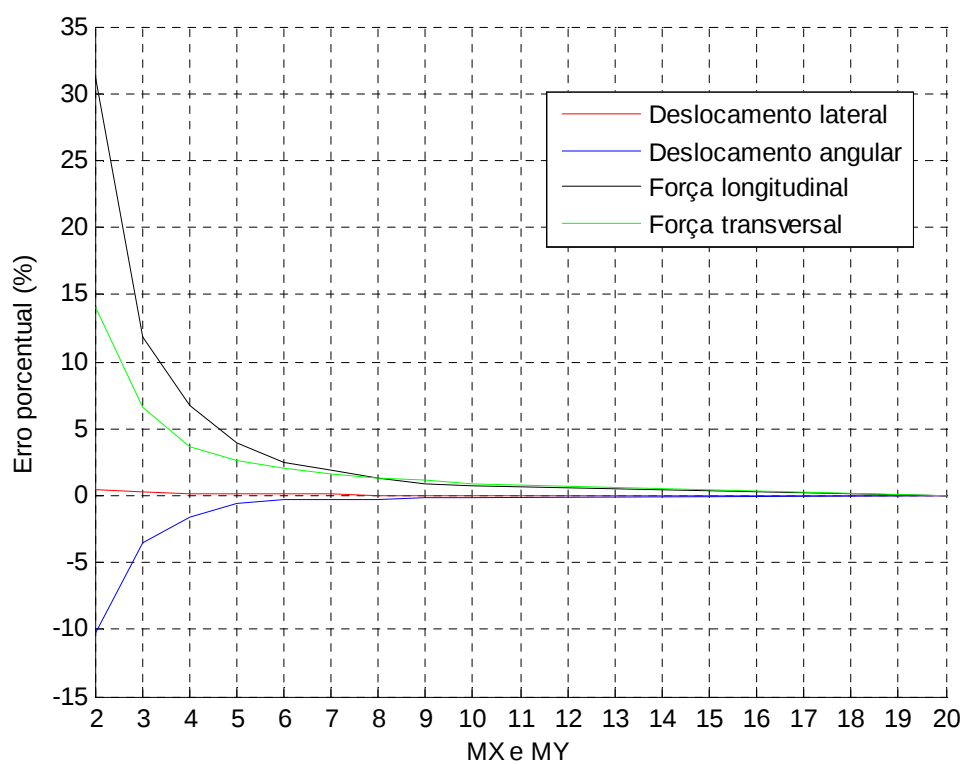


Figura 33 - Erro percentual do deslocamento lateral e força no contato para valores de MX e MY

Percebe-se claramente das três figuras que os resultados diferem consideravelmente dependendo do tipo de discretização escolhida, chegando a uma variação máxima calculada de 30% para o valor de força longitudinal. No entanto, por se tratar de uma solicitação leve / moderada, esta variação reduz-se rapidamente com uma melhor discretização da zona de contato. Se com MX e MY iguais a 2 temos resultados muito ruins, já com uma discretização de 5x5 obtemos resultados bastante próximos de uma discretização 20x20. Para uma discretização 9x9 garantimos, para esta solicitação, erros menores que 1% nas quatro variáveis estudadas.

A Tabela 1 resume os resultados da simulação em função do tempo de cálculo. O passo de tempo utilizado foi de 0,001s, para um tempo total de simulação de 15s. Percebe-se claramente a influência da discretização da zona de contato no algoritmo FASTSIM no tempo de simulação total. O uso de uma discretização muito fina inviabiliza o uso da rotina em aplicações em tempo real.

Tabela 1 - Resultados de tempo de simulação

Tipo	Tempo de simulação normalizado pelo tempo real
2x2	0,620
3x3	0,641
4x4	0,667
5x5	0,693
6x6	0,706
7x7	0,724
8x8	0,753
9x9	0,789
10x10	0,823
20x20	1,221

Uma simulação de solicitação mais severa também foi efetuada. Para este caso, escolheu-se uma entrada em curva de raio 300m e velocidade 30 m/s. Neste caso, o

rodeiro frontal encontra-se na iminência do descarrilamento. O objetivo é comparar os resultados obtidos em termos de precisão do cálculo.

Para esta simulação, uma discretização de 2x2 leva ao descarrilamento. A Figura 34 apresenta os resultados de erro porcentual para esta simulação. Diferentemente do caso anterior, agora a força transversal apresenta maior imprecisão, mesmo para uma discretização mais fina. Já a força longitudinal apresenta resultados bastante precisos já para uma discretização 6x6. Portanto, para uma rotina que deve poder ser utilizada em qualquer solicitação, escolheu-se como discretização padrão 9x9. Com isso, garante-se ótimos resultados em solicitações normais e uma precisão mínima em solicitações severas, sem penalizar o tempo de cálculo. Esta pode ser eventualmente modificada pelo usuário, no entanto recomenda-se que nunca seja menor que 5x5.

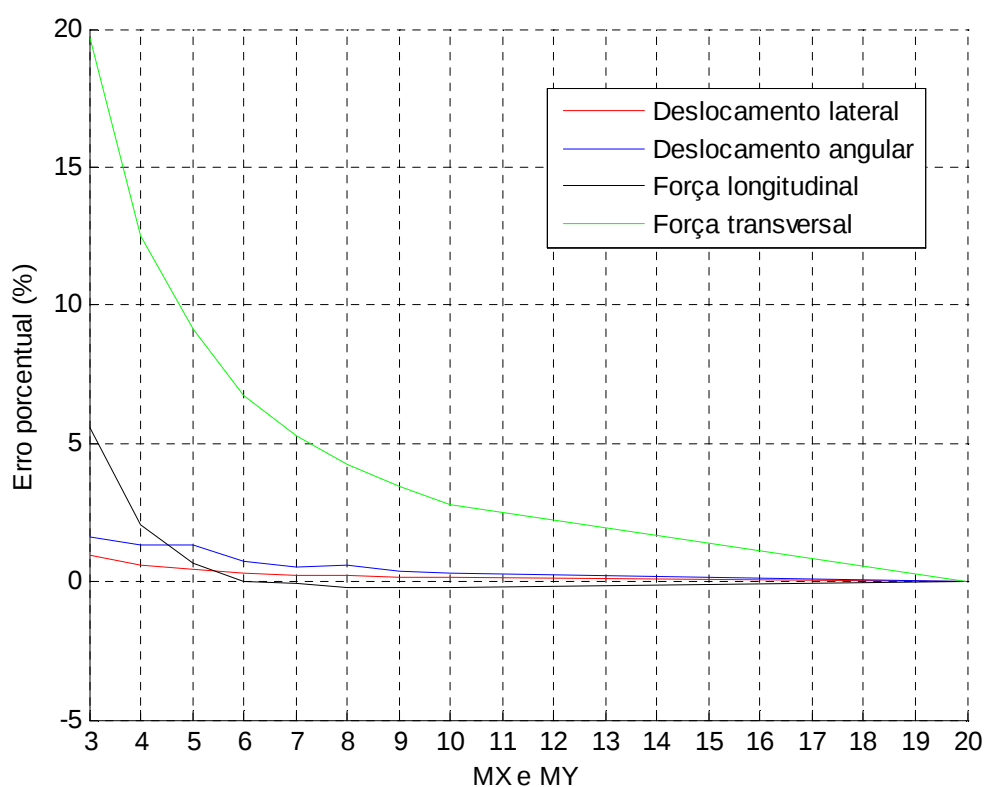


Figura 34 - Erro porcentual para inscrição em curva severa

3.4 Variação do critério L/V

Uma série de simulações foi proposta a fim de caracterizar-se o variação do valor de L/V , segundo o raio de curva e a velocidade do veículo. Procura-se com isso mapear, para um determinado veículo, os valores da relação L/V quando o mesmo encontra-se em regime de raio constante. Para tanto considerou-se uma variação de 5 a 30m/s e de 100 a 1000m de raio de curva. O período de inscrição e saída de curva não será aqui abordado, sendo sempre considerado de 80m para todas as simulações. Considerou-se curva com sobrelevação, definida tal como apresentada na Figura 16.

Para os casos em que houve descarrilamento do veículo, o valor das forças lateral e vertical considerado foi o do instante do descarrilamento, ou seja, o valor limite a partir do qual o rodado não apresenta mais capacidade de centralização. No entanto, dependendo da característica de suspensão do veículo, o descarrilamento só ocorre de fato para um deslocamento lateral muito maior, uma vez que o truque ainda tem capacidade de centralização do segundo rodado. Apesar disso, a situação de descarrilamento continua sendo considerada a crítica por rodado, já que a situação exposta acima não é segura.

As características do veículo utilizado são apresentadas na Tabela 2. Considerou-se adicionalmente coeficiente de atrito μ de 0,6 entre roda e trilho e bitola da via de 1,435m. O passo de simulação variou entre 0,001s e 0,0005s.

A Figura 35 apresenta o resultado destas simulações. Houve descarrilamento para as simulações com raio de curva de 100m e velocidade 25 e 30m/s e raio de curva 200m e velocidade 30m/s, para as quais percebe-se claramente que a tendência de aumento do índice L/V com a redução do raio varia. A redução do valor de L/V entre 200m e 100m para velocidade 30m/s é consequência do fato de que a 200m, mesmo o descarrilamento ocorrendo, temos um deslocamento final do rodado de 6,39mm, muito próximo de 6,17mm. Já a 100m o veículo escapa totalmente, a solicitação sendo mais severa.

Tabela 2 - Características do veículo utilizado

Suspensão lateral primária	8.10^6 N/m
Suspensão angular primária	$8,16.10^7 \text{ Nm/rad}$
Suspensão lateral secundária	10^5 N/m
Suspensão long. secundária	2.10^5 Nm
Amortecimento lateral secundário	6.10^4 Ns/m
Amortecimento long. secundário	10^5 Nm/s
Distância entre eixos	3,0m
Distância entre H	15,0m
Massa do rodeiro	1887kg
Massa do truque	3000kg
Massa do vagão	110000kg
Inércia do rodeiro	800 kgm^2
Inércia do truque	$I_{xx}=I_{yy}=1000 \text{ kgm}^2, I_{zz}=3500 \text{ kgm}^2$
Inércia do vagão	$I_{xx}=30000 \text{ kgm}^2, I_{yy}=25000 \text{ kgm}^2, I_{zz}=100000 \text{ kgm}^2$

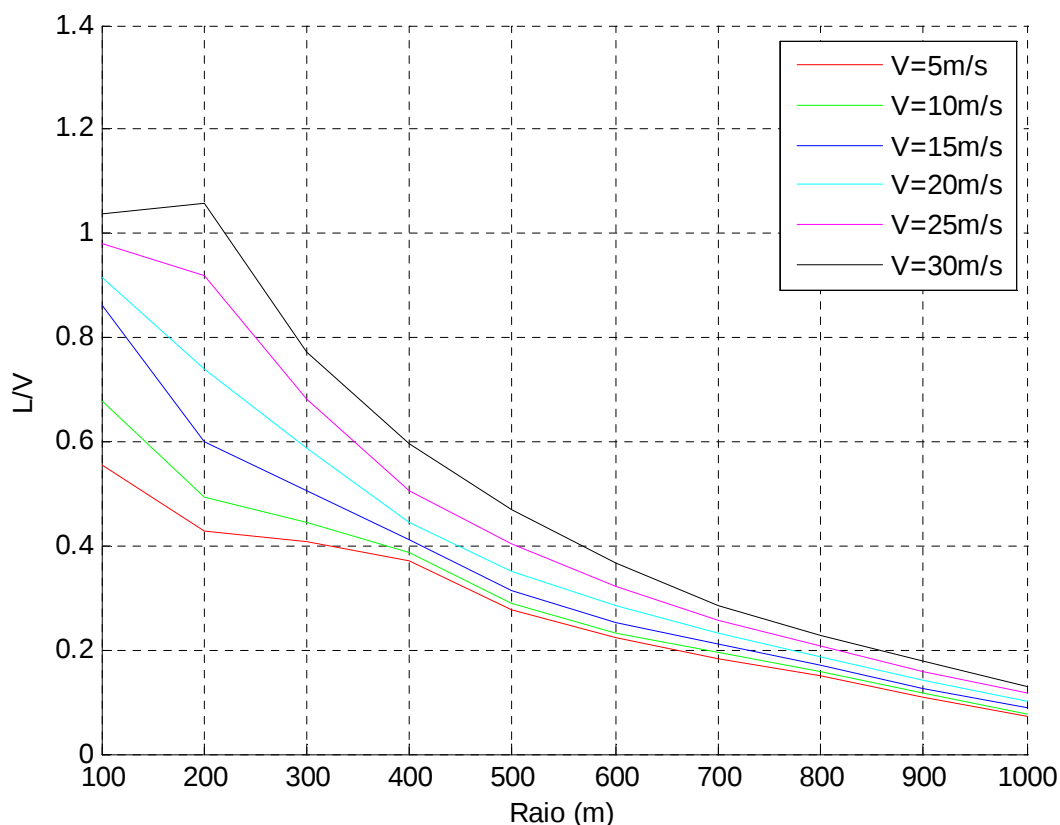


Figura 35- Mapeamento do índice L/V

Observa-se que para curvas de grande raio, o valor de L/V é bastante próximo em todas as velocidades consideradas. Conforme a solicitação de trajetória da via torna-se mais acentuada, a influência da velocidade sobre a possibilidade de descarrilamento aumenta, de maneira não linear. A influência da característica não linear da sobrelevação é maior a baixas velocidades (5 e 10m/s), sendo responsável pela inflexão observada entre 300 e 100m. A altas velocidades esta não é observada pois ocorre descarrilamento antes do final da entrada da curva.

Os valores máximos obtidos quando ocorre descarrilamento são menores do que o valor encontrado para o teste de força lateral com apenas um rodeiro. A explicação de tal redução reside na influência do termo de referencial acelerado sobre o escorregamento lateral e longitudinal, como já discutido. Além disso, a sobrelevação da via reduz a força vertical na roda externa à curva. Na Figura 36 estão representadas as forças no contato da roda direita (externa à curva) para o caso de velocidade 25m/s e raio de curva de 200m. Percebe-se que o veículo está na

iminência do descarrilamento, com um deslocamento lateral em curva de 6,13mm e ângulo do plano de contato de 67°.

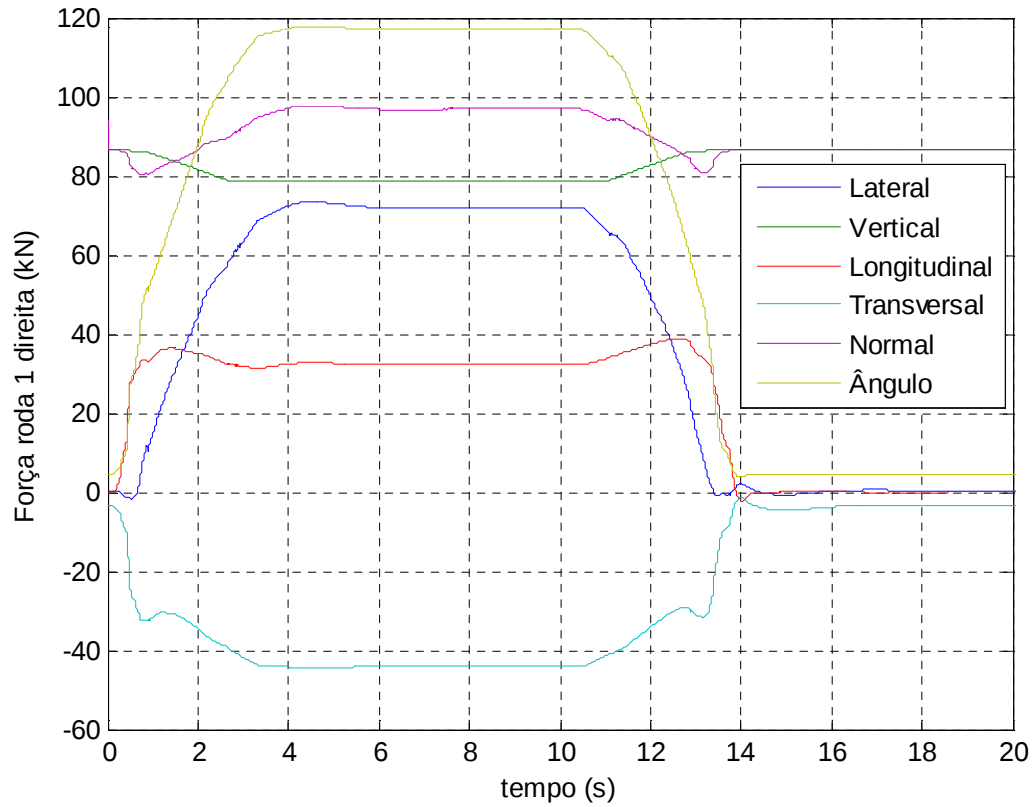


Figura 36 - Forças na roda direita (externa) para exemplo de inscrição em curva

O valor do índice de segurança L/V pode ser calculado matematicamente, para o caso de um rodéiro em curva de raio constante, através da equação (51). A principal hipótese para a obtenção desta equação é a de que apenas a roda externa contribui com a força lateral positiva. Além disso, a influência do truque na dinâmica do rodéiro não está sendo considerada. Porém, esta é uma equação geral o suficiente para o caso de curvas com sobrelevação. A Figura 37 apresenta o mapeamento desta equação para variação de R e V . A característica da sobrelevação é a mesma apresentada na Figura 16 e os valores de geometria são os apresentados na Tabela 2.

$$\frac{L}{V} = \frac{\left(\frac{V_t^2}{R} \cos \varphi - g \sin \varphi \right)}{\left(\frac{g}{2} + \frac{V_t^2 h_{CG}}{R 2b} \right) \cos \varphi + \left(\frac{V_t^2}{R} - \frac{h_{CG}}{2b} g \right) \sin \varphi} \quad (51)$$

onde: V_t é a velocidade de translação do rodeiro, R o raio da curva, h_{cg} a altura do centro do baricentro do rodeiro e $2b$ a bitola da via

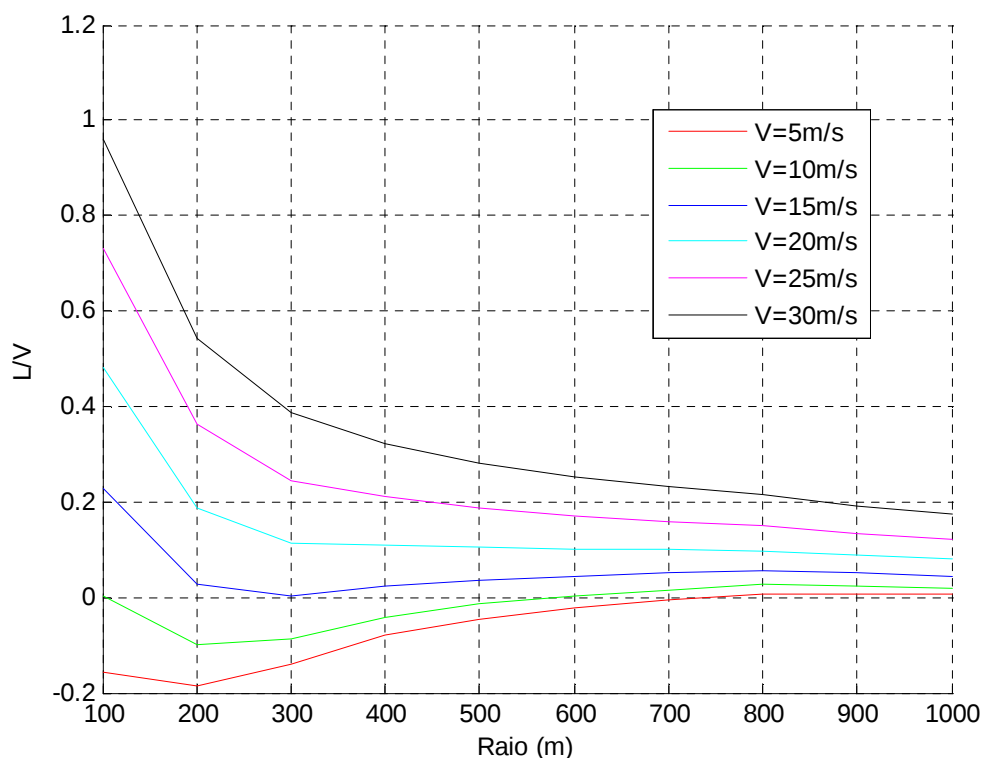


Figura 37 - Índice L/V para formulação teórica

A partir destas formulações, é possível obter uma relação simples entre os valores teóricos calculados a partir da Equação (51). O objetivo é poder conhecer o valor de L/V a partir de uma correlação entre o modelo proposto e o cálculo teórico. No entanto, deve-se verificar a influência da sobrelevação da via e da variação da mesma na função a ser determinada. A Figura 38 mostra este resultado para a determinação de L/V através do modelo proposto. Utilizam-se velocidades de 10, 15 e 20 m/s e raios de curva de 250 a 800m, para variações de mais 50% e menos 50% da sobrelevação determinada pela Figura 16. Percebe-se claramente que L/V diminui com aumento da sobrelevação. Além disso, quanto maior a velocidade menor a influência da variação da sobrelevação. No entanto, sobrelevação excessiva sobrecarrega a roda interna, podendo levá-la ao descarrilamento.

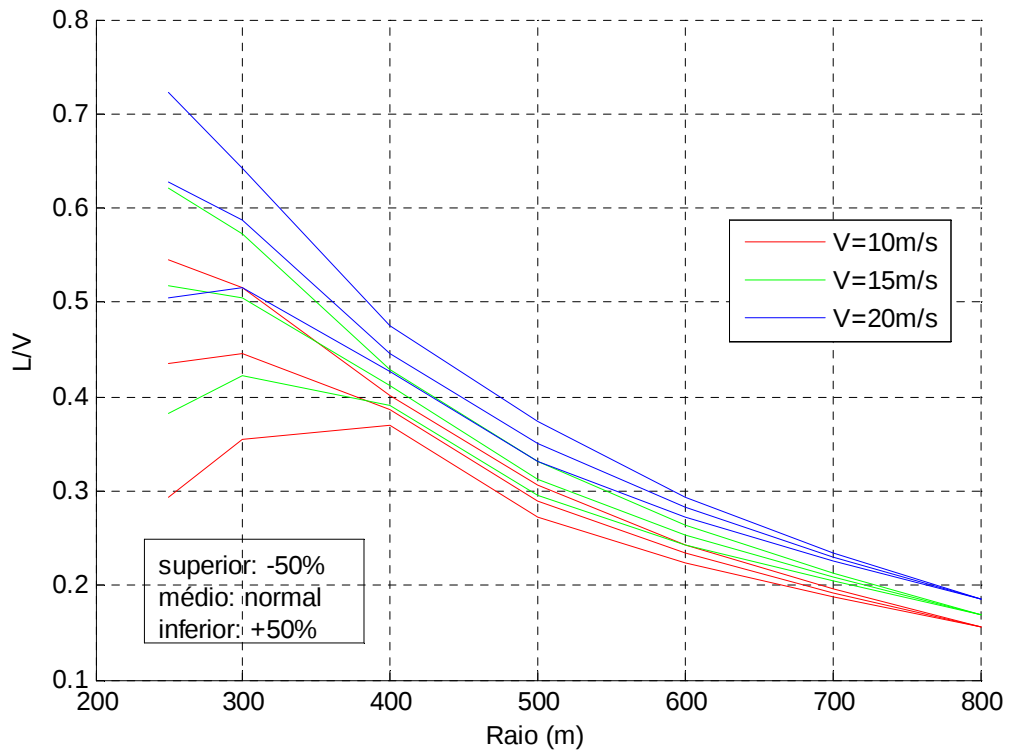


Figura 38 - Variação do índice L/V com superlevação - resultado da rotina

Propõe-se a utilização de Fatores de Correção (FC) que relacionam de maneira direta o valor de L/V calculado através da fórmula teórica (Figura 37) e através do modelo proposto (Figura 38), da seguinte maneira:

$$L/V_{rotina} = \frac{L/V_{teórico}}{FC} \quad (52)$$

O resultado obtido é mostrado na Figura 39. Para o caso de sobrelevação do tipo normal, a seguinte função é proposta para o cálculo de FC:

$$FC(V, R) = f(V) R^2 + g(V) R + h(V) \quad (53)$$

Sendo:

$$f(V) = 9,961 \cdot 10^{-8} V - 1,34 \cdot 10^{-6}$$

$$g(V) = -1,162 \cdot 10^{-4} V - 2,254 \cdot 10^{-3}$$

$$h(V) = 0,06702V - 1,178$$

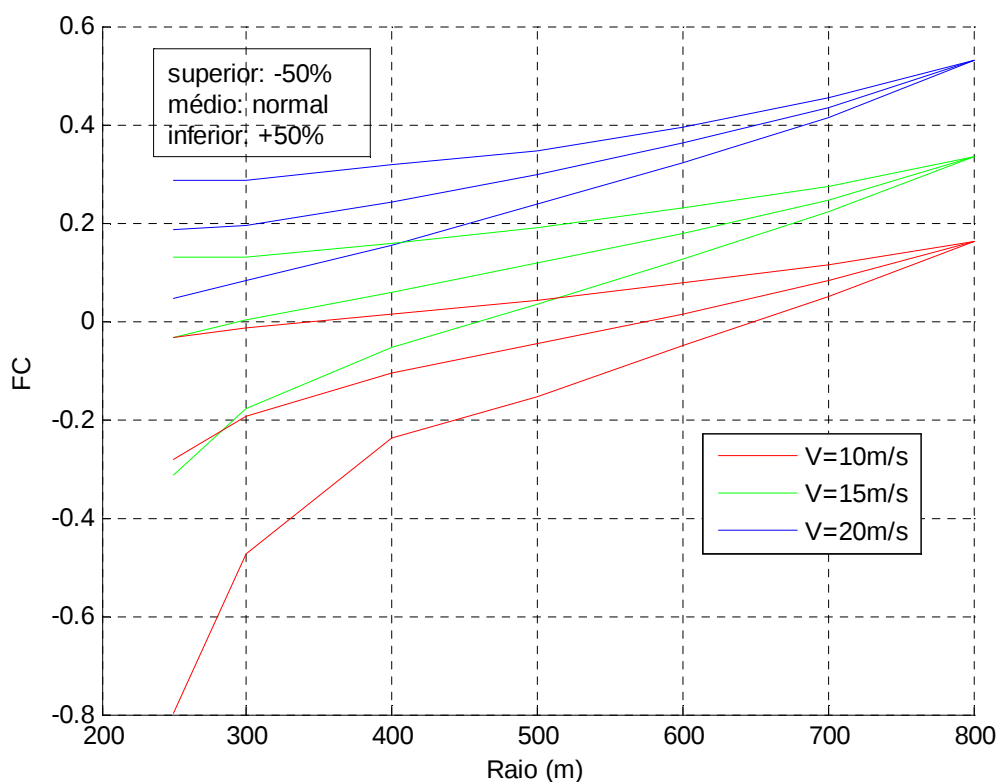


Figura 39 - Variação de FC com raio e velocidade

A Figura 40 mostra que a fórmula proposta é uma aproximação bastante razoável dos valores de FC para o caso de superelevação normal.

Outro aspecto que deve ser observado é a influência da variação do coeficiente de atrito μ no valor do índice L/V . A fórmula de Nadal (Equação 15) já mostra que pequenos valores de μ levam a maiores valores de L/V , já que será necessário maior força lateral para levar ao descarrilamento do veículo. Esta é uma das razões que muitas vezes trilhos são lubrificados, principalmente em áreas de maior risco de descarrilamento. Além disso, evita-se maior desgaste entre roda e trilho.

Foi estudado o resultado de L/V da rotina proposta para uma variação de μ entre 0,1 e 1,0. A Figura 41 mostra este resultado comparativamente a:

- um resultado numérico obtido para um rodeiro único com contato tratado pelo algoritmo FASTSIM,

- dois critérios de segurança obtidos através da fórmula de Nadal e da fórmula 3D proposta por Barbosa.

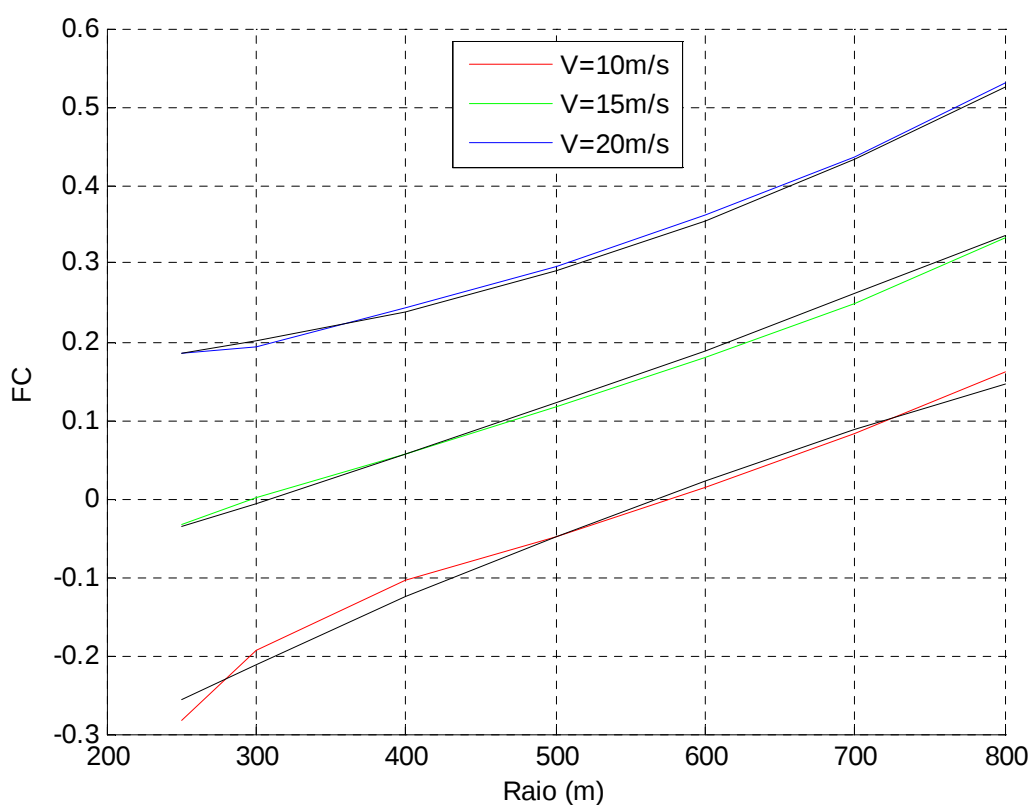


Figura 40 - Fator de Correção calculado e aproximado

Observa-se que em geral todos os resultados são superiores aos obtidos pela formulação de Nadal, o que mostra o caráter conservativo do mesmo. Barbosa [7] salienta que os resultados obtidos para a fórmula 3D e formulação FASTSIM são maiores do que os obtidos através de programas comerciais (Vampire, Nucars) e portanto próximos dos obtidos pela rotina proposta. Isto decorre do fato de nestes casos o rodeiro estar ligado a uma segunda estrutura (truque), que leva-o a atingir maiores ângulos de ataque devido ao torque exercido pelo truque ao rodeiro.

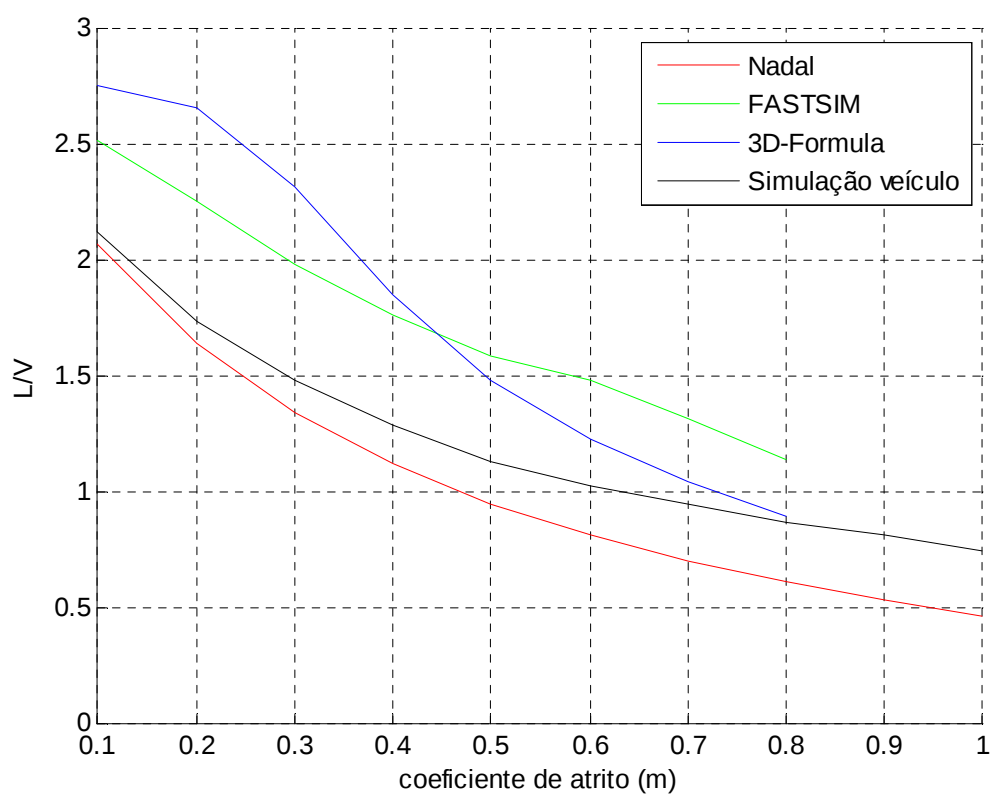


Figura 41 - L/V para diferentes formulações e variação do coeficiente de atrito

4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

As equações dinâmicas do veículo ferroviário foram obtidas utilizando-se a parametrização apresentada e o programa AUTOLEV. O contato roda/trilho foi tratado através da formulação desenvolvida por Kalker, utilizando-se a rotina FASTSIM. As propriedades do contato foram obtidas com o auxílio do programa CCRT e denotam o comportamento não linear do problema tratado. Os escorregamentos relativos foram obtidos e tratados para o caso de referenciais não inerciais, tais como inscrição em curvas.

Utilizou-se um integrador numérico explícito de passo fixo, buscando-se adequar o tempo de simulação ao tempo real. Para tanto, a rotina foi implementada em linguagem C e utilizou-se um passo de integração de 0,001s. O tempo de cálculo da rotina foi otimizado para aplicações em tempo real. Um estudo da discretização da área de contato permitiu obter-se menor tempo de cálculo aliado à precisão dos resultados.

O caso de descarrilamento por força lateral do modelo de rodeiro foi tratado usando a formulação apresentada. Obtiveram-se os mesmos resultados de Barbosa [4], o rodeiro descarrilando para uma força lateral de 147kN e as forças no contato seguindo as mesmas variações.

O caso de inscrição em curva de pequeno raio foi tratado como exemplificativo do desempenho do modelo de veículo completo. Observou-se a estabilidade numérica do modelo, que apresentou convergência mesmo com condições severas de inscrição em curva (raio de 250m e velocidade de 30m/s). As forças no contato foram obtidas assim como o índice de segurança L/V para este caso.

O mapeamento do índice de segurança L/V para diferentes valores de raio de curva e velocidades foi efetuado, para o veículo cujos parâmetros estão descritos na

Tabela 1. Observou-se a não linearidade do índice com ambos os parâmetros. Esta ferramenta permite, dada uma característica de veículo, estudar condições de tráfego e perfil de via não seguras.

A implementação de não linearidades existentes na suspensão do veículo é um objetivo importante para a implementação desta modelagem em simulação de dinâmica ferroviária. Adicionalmente, a comparação de resultados com programas comerciais tais como Vampire e Nucars é um ponto importante para a validação completa da rotina.

Bibliografia

- [1] KANE, T. R., LEVINSON, D. A.: **AutoLev 4 User's Manual**, OnLine Dynamics Inc, 2005
- [2] KANE, T. R., LEVINSON, D. A.: **Dynamics – Theory and Applications**, McGraw-Hill, 1985
- [3] KALKER, J. J.: **Three-dimensional elastic bodies in rolling contact**, 1990
- [4] SHABANA, A. A., SINOKROT, T. NAKHAEINEJAD, M.: **A velocity transformation method for nonlinear dynamic simulation of railroad vehicle systems**, Nonlinear Dynamics (2008), pp 289-307
- [5] POMBO, J. C., AMBROSIO, J. A. C.: **Application of a wheel-rail contact model to railway dynamics in small radius curved track**, Multibody System Dynamics (2007)
- [6] SHABANA, A. A., ZAAZAA, K., E., SUGIYAMA, H.: **Railroad Vehicle Dynamics A Computational Approach**, Taylor & Francis Group, 2008
- [7] BARBOSA, R. S.: **Safety of a Railway Wheelset – Derailment Simulation with Increasing Lateral Force**, Vehicle System Dynamics, Vol 47, No 12. 2009, pp 1493-1510
- [8] MACE, S., PENA, R., WILSON, N., DIBRITO, D., **Effects of wheel-rail contact geometry on wheel set steering forces**, Wear 191 (1996) 204-209
- [9] GRASSIE, S. L., ELKINS, J. A., **Tractive effort, curving and surface damage of rails**, Part 1: Forces exerted on the rails, Wear xxx (2004) xxx-xxx

[10] LEE, S., CHENG, Y., **Hunting stability analysis of high railway vehicle trucks on tangent tracks**. Journal of Sound and Vibration 282 (2005) 881-898

[11] ALIAS, J.: **La voie ferrée**, Eyrolles, deuxième édition, 1984

[12] AL SHEAR, A.: “**Analyse des déformations permanentes des voies ferrées ballastées – Approche dynamique**”, PhD thesis, Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, 2005

[13] BODIN, V.: “**Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral**”, PhD thesis, Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, 2001

[14] MENDES, R. B., ALVES, J. L.; D., LANDAU, L.: **Algoritmo para Análise Transiente Tridimensional de Meios Descontínuos pelo Método dos Elementos Discretos, Métodos Computacionais em Engenharia**, Portugal, 2004

[15] SAUSSINE, G.: “**Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels: application au ballast**”, PhD thesis, Université de Montpellier II, 2004

[16] WICKENS, A. H.: **Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics**, Swets & Zeitlinger, 2003

[17] BARBOSA, R. S.: **Aplicação de Sistemas Multicorpos na Dinâmica de Veículos Guiados**. Tese de Doutorado na Universidade de São Paulo. (1999)

[18] IWNICKI, S.: **Handbook of Railway Vehicle Dynamics**, Taylor & Francis Group, 2006

[19] **NUCARS User's Manual**, TTCL. 2006

[20] STEENBERGEN, M. J. M. M.: **Quantification of dynamic wheel-rail contact forces at short rail irregularities and application to measured rail welds**, Journal of Sound and Vibration (2007)

[21] LIANG, B., LUO, H., MA, X.: **Dynamic model of vertical vehicle-subgrade coupled system under secondary suspension**, Applied Mathematics and Mechanics, Vol 28, No 6. 2007, pp 769-778

[22] ZENG, J., WU, P.: **Study on the wheel/rail interaction and derailment safety**, Wear (2008)

[23] BARBOSA, R. S.: **A 3D Contact Force Safety Criterion for Flange Climb Derailment of a Railway Wheel**, Vehicle System Dynamics, Vol 42, No 5. 2004, pp 289-300

[24] CAI, Y., SUN, H., XU, C.: **Three-dimensional analyses of dynamic responses of track-ground system subjected to a moving train load**, Computer and Structures Vol 86. 2008, pp 816-824

[25] STEENBERGEN, M. J. M. M.: **The role of the contact geometry in wheel-rail impact due to wheel flats**. Vehicle System Dynamics, Vol. 45, No 12. December 2007. pp 1097-1116

Anexo A – Modelo do veículo ferroviário no AUTOLEV

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% vagao_curvas_final.al
% Obtenção das Equações Dinâmicas do Vagão Ferroviário
% ref. Wickens, Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics
% ref Iwnicki, Handbook of Railway Vehicle Dynamics
% Vinicius Alves Fernandes, FUSP
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Unit system
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

UNITSYSTEM KG,METER,SECOND

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Frames and Points
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

NEWTONIAN N
FRAMES trackH{2},track{4},trH{2},trackW,trW
FRAMES contactleft{4},contactright{4}

POINTS OL{4},OR{4},HOL{4},HOR{4},trwheel{4},contleft{4},contright{4}
POINTS WF,WR
POINTS H1C,H2C

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Bodies and Inercias
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

BODIES WHEELSET{4},H{2},W
INERTIA WHEELSET1,I11,I12,I13
INERTIA WHEELSET2,I21,I22,I23
INERTIA H1,IH11,IH12,IH13
INERTIA WHEELSET3,I31,I32,I33
INERTIA WHEELSET4,I41,I42,I43
INERTIA H2,IH21,IH22,IH23
INERTIA W,IW1,IW2,IW3

MASS WHEELSET1 = MASS_WHEELSET1
MASS WHEELSET2 = MASS_WHEELSET2
MASS H1      = MASS_H1
MASS WHEELSET3 = MASS_WHEELSET3
MASS WHEELSET4 = MASS_WHEELSET4
MASS H2      = MASS_H2
MASS W       = MASS_W

INPUT MASS_WHEELSET1 = 1887 KG
INPUT MASS_WHEELSET2 = 1887 KG
INPUT MASS_H1 = 1000 KG
INPUT I11 = 800 KG*M^2
INPUT I12 = 800 KG*M^2
INPUT I13 = 800 KG*M^2
INPUT I21 = 800 KG*M^2
INPUT I22 = 800 KG*M^2
INPUT I23 = 800 KG*M^2
INPUT IH11 = 800 KG*M^2
INPUT IH12 = 800 KG*M^2
INPUT IH13 = 800 KG*M^2

INPUT MASS_WHEELSET3 = 1887 KG
INPUT MASS_WHEELSET4 = 1887 KG
INPUT MASS_H2 = 1000 KG
INPUT I31 = 800 KG*M^2
INPUT I32 = 800 KG*M^2
INPUT I33 = 800 KG*M^2
INPUT I41 = 800 KG*M^2

```

```

INPUT I42 = 800 KG*M^2
INPUT I43 = 800 KG*M^2
INPUT IH21 = 800 KG*M^2
INPUT IH22 = 800 KG*M^2
INPUT IH23 = 800 KG*M^2

```

```

INPUT MASS_W = 110000 KG
INPUT IW1 = 30000 KG*M^2
INPUT IW2 = 5000 KG*M^2
INPUT IW3 = 1000000 KG*M^2

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Geometric Constants and others
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

CONSTANTS L,V,mom,g,e0,h,D
INPUT L = 0.7175 M
INPUT e0 = 0.61 M
INPUT V = 30 M/S
INPUT mom = 0.4572 M
INPUT g = 9.81 M/S^2
INPUT h = 1.5 M
INPUT D = 15 M

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Suspension Parameters - Considered Constants
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

CONSTANTS Kx,Ky,Kz,cx,cy,cz
INPUT Kx = 219300000 N/M
INPUT Ky = 200000000 N/M
INPUT kz = 200000000 N/M
INPUT cx = 0 N*S/M
INPUT cy = 0 N*S/M
INPUT cz = 0 N*S/M

```

```

CONSTANTS kx2,ky2,kz2,cx2,cy2,cz2
INPUT kx2 = 100000 N/M
INPUT ky2 = 100000 N/M
INPUT kz2 = 100000 N/M
INPUT cx2 = 10000 N*S/M
INPUT cy2 = 10000 N*S/M
INPUT cz2 = 10000 N*S/M

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Variables and Inputs
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

VARIABLES Px{4},Py{4},Pz{4} %external forces on the wheelsets
VARIABLES Lx{4},Ly{4},Lz{4} %external torques on the wheelsets
VARIABLES PxH{2},PyH{2},PzH{2},LxH{2},LyH{2},LzH{2} %external forces and torques, reference frame : H
VARIABLES PxW,PyW,PzW,LxW,LyW,LzW

```

```

INPUT Px1 = 0.0 N
INPUT Py1 = 0.0 N
INPUT Pz1 = 0.0 N
INPUT Lx1 = 0.0 N
INPUT Ly1 = 0.0 N
INPUT Lz1 = 0.0 N
INPUT Px2 = 0.0 N
INPUT Py2 = 0.0 N
INPUT Pz2 = 0.0 N
INPUT Lx2 = 0.0 N
INPUT Ly2 = 0.0 N
INPUT Lz2 = 0.0 N
INPUT PxH1 = 0.0 N
INPUT PyH1 = 0.0 N
INPUT PzH1 = 0.0 N
INPUT LxH1 = 0.0 N
INPUT LyH1 = 0.0 N
INPUT LzH1 = 0.0 N

```

```

INPUT Px3 = 0.0 N
INPUT Py3 = 0.0 N
INPUT Pz3 = 0.0 N
INPUT Lx3 = 0.0 N
INPUT Ly3 = 0.0 N
INPUT Lz3 = 0.0 N
INPUT Px4 = 0.0 N
INPUT Py4 = 0.0 N
INPUT Pz4 = 0.0 N
INPUT Lx4 = 0.0 N
INPUT Ly4 = 0.0 N
INPUT Lz4 = 0.0 N
INPUT PxH2 = 0.0 N
INPUT PyH2 = 0.0 N
INPUT PzH2 = 0.0 N
INPUT LxH2 = 0.0 N
INPUT LyH2 = 0.0 N
INPUT LzH2 = 0.0 N

```

```

INPUT PxW = 0.0 N
INPUT PyW = 0.0 N
INPUT PzW = 0.0 N
INPUT LxW = 0.0 N
INPUT LyW = 0.0 N
INPUT LzW = 0.0 N

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% Motionvariables
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

MOTIONVARIABLES' u{42}'

```

```

INPUT u1 = 0.0 M
INPUT u2 = 0.0 M
INPUT u3 = 0.0 M
INPUT u4 = 0.0 M
INPUT u5 = 0.0 M
INPUT u6 = 0.0 M
INPUT u7 = 0.0 M
INPUT u8 = 0.0 M
INPUT u9 = 0.0 M
INPUT u10 = 0.0 M
INPUT u11 = 0.0 M
INPUT u12 = 0.0 M
INPUT u13 = 0.0 M
INPUT u14 = 0.0 M
INPUT u15 = 0.0 M
INPUT u16 = 0.0 M
INPUT u17 = 0.0 M
INPUT u18 = 0.0 M
INPUT u1' = 0.0 M/S
INPUT u2' = 0.0 M/S
INPUT u3' = 0.0 M/S
INPUT u4' = 0.0 M/S
INPUT u5' = 0.0 M/S
INPUT u6' = 0.0 M/S
INPUT u7' = 0.0 M/S
INPUT u8' = 0.0 M/S
INPUT u9' = 0.0 M/S
INPUT u10' = 0.0 M/S
INPUT u11' = 0.0 M/S
INPUT u12' = 0.0 M/S
INPUT u13' = 0.0 M/S
INPUT u14' = 0.0 M/S
INPUT u15' = 0.0 M/S
INPUT u16' = 0.0 M/S
INPUT u17' = 0.0 M/S
INPUT u18' = 0.0 M/S

```

```

INPUT u19 = 0.0 M

```

```

INPUT u20 = 0.0 M
INPUT u21 = 0.0 M
INPUT u22 = 0.0 M
INPUT u23 = 0.0 M
INPUT u24 = 0.0 M
INPUT u25 = 0.0 M
INPUT u26 = 0.0 M
INPUT u27 = 0.0 M
INPUT u28 = 0.0 M
INPUT u29 = 0.0 M
INPUT u30 = 0.0 M
INPUT u31 = 0.0 M
INPUT u32 = 0.0 M
INPUT u33 = 0.0 M
INPUT u34 = 0.0 M
INPUT u35 = 0.0 M
INPUT u36 = 0.0 M
INPUT u19' = 0.0 M/S
INPUT u20' = 0.0 M/S
INPUT u21' = 0.0 M/S
INPUT u22' = 0.0 M/S
INPUT u23' = 0.0 M/S
INPUT u24' = 0.0 M/S
INPUT u25' = 0.0 M/S
INPUT u26' = 0.0 M/S
INPUT u27' = 0.0 M/S
INPUT u28' = 0.0 M/S
INPUT u29' = 0.0 M/S
INPUT u30' = 0.0 M/S
INPUT u31' = 0.0 M/S
INPUT u32' = 0.0 M/S
INPUT u33' = 0.0 M/S
INPUT u34' = 0.0 M/S
INPUT u35' = 0.0 M/S
INPUT u36' = 0.0 M/S

```

```

INPUT u37 = 0.0 M
INPUT u38 = 0.0 M
INPUT u39 = 0.0 M
INPUT u40 = 0.0 M
INPUT u41 = 0.0 M
INPUT u42 = 0.0 M
INPUT u37' = 0.0 M/S
INPUT u38' = 0.0 M/S
INPUT u39' = 0.0 M/S
INPUT u40' = 0.0 M/S
INPUT u41' = 0.0 M/S
INPUT u42' = 0.0 M/S

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% Contact aspects (forces and geometry)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

SPECIFIED F1right{3},F1left{3}
SPECIFIED F2right{3},F2left{3}

```

```

SPECIFIED F3right{3},F3left{3}
SPECIFIED F4right{3},F4left{3}

```

```

SPECIFIED lambdar{4}',lambdal{4}'
SPECIFIED rol{4}',ror{4}'

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% Track geometry variables
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

VARIABLE s"
s'=V

```

```

VARIABLES azimuthH{2}",azimuth{4}",azimuthW"

```

```

SPECIFIED phiH{2}",phi{4}",phiW"
SPECIFIED CH{2}',C{4}',CW'
azimuthH1'=s'*CH1
azimuth1'=s'*C1
azimuth2'=s'*C2

```

```

azimuthH2'=s'*CH2
azimuth3'=s'*C3
azimuth4'=s'*C4

```

```

azimuthW'=s'*CW

```

```

azimuthH1"=DT(azimuthH1')
azimuth1"=DT(azimuth1')
azimuth2"=DT(azimuth2')

```

```

azimuthH2"=DT(azimuthH2')
azimuth3"=DT(azimuth3')
azimuth4"=DT(azimuth4')

```

```

azimuthW"=DT(azimuthW')

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Train trajectory
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

VARIABLES xH{2}",yH{2}",zH{2}",xr{4}",yr{4}",zr{4}"
VARIABLES xW",yW",zW"

```

```

xH1'=s'*cos(azimuthH1)
xH1"=DT(xH1')
yH1'=s'*sin(azimuthH1)
yH1"=DT(yH1')
xr1'=s'*cos(azimuth1)
xr1"=DT(xr1')
yr1'=s'*sin(azimuth1)
yr1"=DT(yr1')
xr2'=s'*cos(azimuth2)
xr2"=DT(xr2')
yr2'=s'*sin(azimuth2)
yr2"=DT(yr2')

```

```

xH2'=s'*cos(azimuthH2)
xH2"=DT(xH2')
yH2'=s'*sin(azimuthH2)
yH2"=DT(yH2')
xr3'=s'*cos(azimuth3)
xr3"=DT(xr3')
yr3'=s'*sin(azimuth3)
yr3"=DT(yr3')
xr4'=s'*cos(azimuth4)
xr4"=DT(xr4')
yr4'=s'*sin(azimuth4)
yr4"=DT(yr4')

```

```

xW'=s'*cos(azimuthW)
xW"=DT(xW')
yW'=s'*sin(azimuthW)
yW"=DT(yW')

```

```

zr1=0
zr1'=0
zr1"=0
zr2=0
zr2'=0
zr2"=0
zr3=0
zr3'=0
zr3"=0
zr4=0
zr4'=0
zr4"=0

```

zH1=0
 zH1'=0
 zH1''=0
 zH2=0
 zH2'=0
 zH2''=0
 zW=0
 zW'=0
 zW''=0

INPUT xr1 = 0.0 M % D+2*h M
 INPUT xr2 = 0.0 M % D-h M
 INPUT xH1 = 0.0 M % D+h M
 INPUT yr1 = 0.0 M
 INPUT yr2 = 0.0 M
 INPUT yH1 = 0.0 M

INPUT xr3 = 0.0 M % 2*h M
 INPUT xr4 = 0.0 M
 INPUT xH2 = 0.0 M % h M
 INPUT yr3 = 0.0 M
 INPUT yr4 = 0.0 M
 INPUT yH2 = 0.0 M

INPUT xW = 0.0 M % D/2+h M
 INPUT yW = 0.0 M

%%%%%%%%%%%%%% Gravity
 %%%%%%%%%%%%%%

GRAVITY(-g*N3>)

%%%%%%%%%%%%%% Coordinate system
 %%%%%%%%%%%%%%

DIRCOS(N,trackH1,SPACE123,phiH1,0,azimuthH1)
 DIRCOS(N,track1,SPACE123,phi1,0,azimuth1)
 DIRCOS(N,track2,SPACE123,phi2,0,azimuth2)
 DIRCOS(N,trackH2,SPACE123,phiH2,0,azimuthH2)
 DIRCOS(N,track3,SPACE123,phi3,0,azimuth3)
 DIRCOS(N,track4,SPACE123,phi4,0,azimuth4)
 DIRCOS(N,trackW,SPACE123,phiW,0,azimuthW)

DIRCOS(trackH1,trH1,BODY123,0,0,0)
 DIRCOS(trH1,H1,BODY123,u4,u5,u6)
 DIRCOS(track1,wheelset1,BODY123,u10,0,u12)
 DIRCOS(track2,wheelset2,BODY123,u16,0,u18)

DIRCOS(trackH2,trH2,BODY123,0,0,0)
 DIRCOS(trH2,H2,BODY123,u22,u23,u24)
 DIRCOS(track3,wheelset3,BODY123,u28,0,u30)
 DIRCOS(track4,wheelset4,BODY123,u34,0,u36)

DIRCOS(trackW,trW,BODY123,0,0,0)
 DIRCOS(trW,W,BODY123,u40,u41,u42)

SIMPROT(wheelset1,contactright1,-1,lambdar1)
 SIMPROT(wheelset1,contactleft1,1,lambdal1)

SIMPROT(wheelset2,contactright2,-1,lambdar2)
 SIMPROT(wheelset2,contactleft2,1,lambdal2)

SIMPROT(wheelset3,contactright3,-1,lambdar3)
 SIMPROT(wheelset3,contactleft3,1,lambdal3)

SIMPROT(wheelset4,contactright4,-1,lambdar4)
 SIMPROT(wheelset4,contactleft4,1,lambdal4)

N_trackH1

```

N_track1
N_track2
N_trH2
N_trackH2
N_track3
N_track4
N_trH2
N_trackW

trH1_H1
trH1_H1:=replace(trackH1_H1,sin(u4)=u4,cos(u4)=1,sin(u5)=u5,cos(u5)=1,sin(u6)=u6,cos(u6)=1)
trH1_H1:=replace(trackH1_H1,u4*u6=0,u6*u4=0,u5*u4=0,u4*u5=0,u6*u5=0,u5*u6=0,u4*u5*u6=0)

track1_wheelset1
track1_wheelset1:=replace(track1_wheelset1,sin(u10)=u10,cos(u10)=1,sin(u12)=u12,cos(u12)=1)
track1_wheelset1:=replace(track1_wheelset1,u10*u12=0,u12*u10=0)

track2_wheelset2
track2_wheelset2:=replace(track2_wheelset2,sin(u16)=u16,cos(u16)=1,sin(u18)=u18,cos(u18)=1)
track2_wheelset2:=replace(track2_wheelset2,u16*u18=0,u18*u16=0)

trH2_H2
trH2_H2:=replace(trackH2_H2,sin(u22)=u22,cos(u22)=1,sin(u23)=u23,cos(u23)=1,sin(u24)=u24,cos(u24)=1)
trH2_H2:=replace(trackH2_H2,u22*u24=0,u24*u22=0,u22*u23=0,u23*u22=0,u24*u23=0,u23*u24=0,u22*u23*u24=
0)

track3_wheelset3
track3_wheelset3:=replace(track3_wheelset3,sin(u28)=u28,cos(u28)=1,sin(u30)=u30,cos(u30)=1)
track3_wheelset3:=replace(track3_wheelset3,u28*u30=0,u30*u28=0)

track4_wheelset4
track4_wheelset4:=replace(track4_wheelset4,sin(u34)=u34,cos(u34)=1,sin(u36)=u36,cos(u36)=1)
track4_wheelset4:=replace(track4_wheelset4,u34*u36=0,u36*u34=0)

trackW_W
trackW_W:=replace(trackW_W,sin(u40)=u40,cos(u40)=1,sin(u41)=u41,cos(u41)=1,sin(u42)=u42,cos(u42)=1)
trackW_W:=replace(trackW_W,u40*u42=0,u42*u40=0,u41*u40=0,u40*u41=0,u42*u41=0,u41*u42=0,u40*u41*u42
=0)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% System geometry %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

P_NO_trackH1O>=xH1*N1>+yH1*N2>+zH1*N3>
P_NO_track1O>=xr1*N1>+yr1*N2>+zr1*N3>
P_NO_track2O>=xr2*N1>+yr2*N2>+zr2*N3>

P_NO_trackH2O>=xH2*N1>+yH2*N2>+zH2*N3>
P_NO_track3O>=xr3*N1>+yr3*N2>+zr3*N3>
P_NO_track4O>=xr4*N1>+yr4*N2>+zr4*N3>

P_NO_trackWO>=xW*N1>+yW*N2>+zW*N3>

P_NO_trh1O>=(P_NO_track1o>+P_NO_track2o>)/2
P_NO_trh2O>=(P_NO_track3o>+P_NO_track4o>)/2

P_NO_trWo>=(P_NO_trh1o>+P_NO_trh2o>)/2

P_trH1O_H1O>=u1*trackH11>+u2*trackH12>+u3*trackH13>
P_trH2O_H2O>=u19*trackH21>+u20*trackH22>+u21*trackH23>

P_trWO_Wo>=u37*trackW1>+u38*trackW2>+u39*trackW3>

P_track1o_wheelset1o>=u8*track12>+u9*track13>
P_track1o_trwheel1>=u8*track12>+u9*track13>

P_track2o_wheelset2o>=u13*track21>+u14*track22>+u15*track23>
P_track2o_trwheel2>=u13*track21>+u14*track22>+u15*track23>

P_track3o_wheelset3o>=u25*track31>+u26*track32>+u27*track33>
P_track3o_trwheel3>=u25*track31>+u26*track32>+u27*track33>

```

$P_track4o_wheelset4o = u31*track41 + u32*track42 + u33*track43$
 $P_track4o_trwheel4 = u31*track41 + u32*track42 + u33*track43$

$P_h1o_wheelset1o = P_track1o_wheelset1o - P_trH1O_h1o + P_trH1O_track1O$
 $P_h1o_wheelset2o = P_track2o_wheelset2o - P_trH1O_h1o + P_trH1O_track2O$
 $P_h2o_wheelset3o = P_track3o_wheelset3o - P_trH2O_h2o + P_trH2O_track3O$
 $P_h2o_wheelset4o = P_track4o_wheelset4o - P_trH2O_h2o + P_trH2O_track4O$

$P_wheelset1O_OL1 = e0*wheelset12$
 $P_wheelset1O_OR1 = -e0*wheelset12$

$P_wheelset2O_OL2 = e0*wheelset22$
 $P_wheelset2O_OR2 = -e0*wheelset22$

$P_wheelset3O_OL3 = e0*wheelset32$
 $P_wheelset3O_OR3 = -e0*wheelset32$

$P_wheelset4O_OL4 = e0*wheelset42$
 $P_wheelset4O_OR4 = -e0*wheelset42$

$P_h1o_HOL1 = h*h11 + e0*h12$
 $P_h1o_HOR1 = h*h11 - e0*h12$
 $P_h1o_HOL2 = -h*h11 + e0*h12$
 $P_h1o_HOR2 = -h*h11 - e0*h12$

$P_h2o_HOL3 = h*h21 + e0*h22$
 $P_h2o_HOR3 = h*h21 - e0*h22$
 $P_h2o_HOL4 = -h*h21 + e0*h22$
 $P_h2o_HOR4 = -h*h21 - e0*h22$

$P_H1o_H1C = 0$
 $P_H2o_H2C = 0$

$P_Wo_WF = D/2*W1$
 $P_Wo_WR = -D/2*W1$

$P_Wo_h1o = P_trh1o_h1o - P_trWo_wo + P_trWo_trh1o$
 $P_Wo_h2o = P_trh2o_h2o - P_trWo_wo + P_trWo_trh2o$

$P_wheelset1O_contactright1O = -L*wheelset12 - ror1*wheelset13$
 $P_wheelset1O_contactleft1O = L*wheelset12 - rol1*wheelset13$
 $P_wheelset1O_contright1 = -L*wheelset12 - ror1*wheelset13$
 $P_wheelset1O_contleft1 = L*wheelset12 - rol1*wheelset13$

$P_wheelset2O_contactright2O = -L*wheelset22 - ror2*wheelset23$
 $P_wheelset2O_contactleft2O = L*wheelset22 - rol2*wheelset23$
 $P_wheelset2O_contright2 = -L*wheelset22 - ror2*wheelset23$
 $P_wheelset2O_contleft2 = L*wheelset22 - rol2*wheelset23$

$P_wheelset3O_contactright3O = -L*wheelset32 - ror3*wheelset33$
 $P_wheelset3O_contactleft3O = L*wheelset32 - rol3*wheelset33$
 $P_wheelset3O_contright3 = -L*wheelset32 - ror3*wheelset33$
 $P_wheelset3O_contleft3 = L*wheelset32 - rol3*wheelset33$

$P_wheelset4O_contactright4O = -L*wheelset42 - ror4*wheelset43$
 $P_wheelset4O_contactleft4O = L*wheelset42 - rol4*wheelset43$
 $P_wheelset4O_contright4 = -L*wheelset42 - ror4*wheelset43$
 $P_wheelset4O_contleft4 = L*wheelset42 - rol4*wheelset43$

%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%% Angular Velocity (imposed)
 %%%%%%%%%

$w_trackH1_n = \phi H1*trackH1 + azimuthH1*trackH13$
 $w_track1_n = \phi 1*track11 + azimuth1*track13$
 $w_track2_n = \phi 2*track21 + azimuth2*track23$
 $w_trackH1_trH1 = 0$
 $w_h1_trH1 = u4*h11 + u5*h12 + u6*h13$
 $w_wheelset1_track1 = u10*wheelset11 + u11*wheelset12 + u12*wheelset13$
 $w_wheelset2_track2 = u16*wheelset21 + u17*wheelset22 + u18*wheelset23$

```

w_trackH2_n>=phiH2'*trackH21>+azimuthH2'*trackH23>
w_track3_n>=phi3'*track31>+azimuth3'*track33>
w_track4_n>=phi4'*track41>+azimuth4'*track43>
w_trackH2_trH2>=0>
w_h2_trH2>=u22'*h21>+u23'*h22>+u24'*h23>
w_wheelset3_track3>=u28'*wheelset31>+u29'*wheelset32>+u30'*wheelset33>
w_wheelset4_track4>=u34'*wheelset41>+u35'*wheelset42>+u36'*wheelset43>

w_trackW_n>=phiW'*trackW1>+azimuthW'*trackW3>
w_trackw_trW>=0>
w_W_trW>=u40'*W1>+u41'*W2>+u42'*W3>

%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% Linear Velocity
%%%%%%%%%%%%%%

V_trackH1O_N>=DT(P_NO_trackH1O>,N)
V_track1O_N>=DT(P_NO_track1O>,N)
V_track2O_N>=DT(P_NO_track2O>,N)

V_trackH2O_N>=DT(P_NO_trackH2O>,N)
V_track3O_N>=DT(P_NO_track3O>,N)
V_track4O_N>=DT(P_NO_track4O>,N)

V_trackWo_N>=DT(P_NO_trackWo>,N)

V_h1o_trH1>=DT(P_trH1O_h1o>,trH1)
V_h1o_trackH1>=DT(P_trackh1o_h1o>,trackH1)
V_wheelset1o_track1>=DT(P_track1o_wheelset1o>,track1)
V_wheelset2o_track2>=DT(P_track2o_wheelset2o>,track2)

V_h2o_trH2>=DT(P_trH2O_h2o>,trH2)
V_h2o_trackH2>=DT(P_trackh2o_h2o>,trackH2)
V_wheelset3o_track3>=DT(P_track3o_wheelset3o>,track3)
V_wheelset4o_track4>=DT(P_track4o_wheelset4o>,track4)

V_Wo_trW>=DT(P_trWO_WO>,trW)
V_Wo_trackW>=DT(P_trackWo_Wo>,trackW)

v2pts(n,trackw,trackWo,trWo)
v1pt(n,trackW,trWo,Wo)

v2pts(n,trackH1,trackH1o,trh1o)
v1pt(n,trackH1,trh1o,h1o)

v2pts(n,track1,track1O,trwheel1)
v1pt(n,track1,trwheel1,wheelset1o)

v2pts(n,track2,track2O,trwheel2)
v1pt(n,track2,trwheel2,wheelset2o)

v2pts(n,wheelset1,wheelset1O,OL1)
v2pts(n,wheelset1,wheelset1O,OR1)

v2pts(n,wheelset2,wheelset2O,OL2)
v2pts(n,wheelset2,wheelset2O,OR2)

v2pts(n,h1,h1o,HOL1)
v2pts(n,h1,h1o,HOR1)

v2pts(n,h1,h1o,HOL2)
v2pts(n,h1,h1o,HOR2)

v2pts(n,track1,trwheel1,contleft1)
v2pts(track1,wheelset1,wheelset1o,contactleft1o)
v1pt(n,track1,contleft1,contactleft1o)

v2pts(n,track1,trwheel1,contright1)
v2pts(track1,wheelset1,wheelset1o,contactright1o)
v1pt(n,track1,contright1,contactright1o)

v2pts(n,track2,trwheel2,contleft2)

```

```
v2pts(track2,wheelset2,wheelset2o,contactleft2o)
v1pt(n,track2,contleft2,contactleft2o)
```

```
v2pts(n,track2,trwheel2,contright2)
v2pts(track2,wheelset2,wheelset2o,contactright2o)
v1pt(n,track2,contright2,contactright2o)
```

```
v2pts(n,trackH2,trackH2o,th2o)
v1pt(n,trackH2,th2o,h2o)
```

```
v2pts(n,track3,track3O,trwheel3)
V1pt(n,track3,trwheel3,wheelset3o)
```

```
v2pts(n,track4,track4O,trwheel4)
V1pt(n,track4,trwheel4,wheelset4o)
```

```
v2pts(n,wheelset3,wheelset3O,OL3)
v2pts(n,wheelset3,wheelset3O,OR3)
```

```
v2pts(n,wheelset4,wheelset4O,OL4)
v2pts(n,wheelset4,wheelset4O,OR4)
```

```
v2pts(n,h2,h2o,HOL3)
v2pts(n,h2,h2o,HOR3)
```

```
v2pts(n,h2,h2o,HOL4)
v2pts(n,h2,h2o,HOR4)
```

```
v2pts(n,track3,trwheel3,contleft3)
v2pts(track3,wheelset3,wheelset3o,contactleft3o)
v1pt(n,track3,contleft3,contactleft3o)
```

```
v2pts(n,track3,trwheel3,contright3)
v2pts(track3,wheelset3,wheelset3o,contactright3o)
v1pt(n,track3,contright3,contactright3o)
```

```
v2pts(n,track4,trwheel4,contleft4)
v2pts(track4,wheelset4,wheelset4o,contactleft4o)
v1pt(n,track4,contleft4,contactleft4o)
```

```
v2pts(n,track4,trwheel4,contright4)
v2pts(track4,wheelset4,wheelset4o,contactright4o)
v1pt(n,track4,contright4,contactright4o)
```

```
v2pts(n,w,wo,WF)
v2pts(n,w,wo,WR)
```

```
V_H1C_N>=V_H1o_N>
V_H2C_N>=V_H2o_N>
```

```
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% Creepages at the contact patch
%%%%%%%%%%
```

```
CREEPE_LEFT1>=(v_contactleft1o_track1>+V_contleft1_N>)/V
express(CREEPE_LEFT1>,track1)
CREEPELEFT11=DOT(CREEPE_LEFT1>,track11>)
CREEPELEFT12=DOT(CREEPE_LEFT1>,track12>)
CREEPELEFT13=DOT(CREEPE_LEFT1>,track13>)
```

```
CREEPE_RIGHT1>=(v_contactright1o_track1>+V_contright1_N>)/V
express(CREEPE_RIGHT1>,track1)
CREEPERIGHT11=DOT(CREEPE_RIGHT1>,track11>)
CREEPERIGHT12=DOT(CREEPE_RIGHT1>,track12>)
CREEPERIGHT13=DOT(CREEPE_RIGHT1>,track13>)
```

```
SPIN_LEFT1>=(W_contactleft1_n>-w_track1_n>)/V
SPINLEFT11=DOT(SPIN_LEFT1>,contactleft11>)
SPINLEFT12=DOT(SPIN_LEFT1>,contactleft12>)
SPINLEFT13=DOT(SPIN_LEFT1>,contactleft13>)
```

```

SPIN_RIGHT1>=(W_contactright1_n>-w_track1_n)/V
SPINRIGHT11=DOT(SPIN_RIGHT1>,contactright11>)
SPINRIGHT12=DOT(SPIN_RIGHT1>,contactright12>)
SPINRIGHT13=DOT(SPIN_RIGHT1>,contactright13>)

CREEPE_LEFT2>=(v_contactleft2o_track2>+V_contleft2_N)/V
express(CREEPE_LEFT2>,track2)
CREEPELEFT21=DOT(CREEPE_LEFT2>,track21>)
CREEPELEFT22=DOT(CREEPE_LEFT2>,track22>)
CREEPELEFT23=DOT(CREEPE_LEFT2>,track23>)

CREEPE_RIGHT2>=(v_contactright2o_track2>+V_contright2_N)/V
express(CREEPE_RIGHT2>,track2)
CREEPERIGHT21=DOT(CREEPE_RIGHT2>,track21>)
CREEPERIGHT22=DOT(CREEPE_RIGHT2>,track22>)
CREEPERIGHT23=DOT(CREEPE_RIGHT2>,track23>)

SPIN_LEFT2>=(W_contactleft2_n>-w_track2_n)/V
SPINLEFT21=DOT(SPIN_LEFT2>,contactleft21>)
SPINLEFT22=DOT(SPIN_LEFT2>,contactleft22>)
SPINLEFT23=DOT(SPIN_LEFT2>,contactleft23>)

SPIN_RIGHT2>=(W_contactright2_n>-w_track2_n)/V
SPINRIGHT21=DOT(SPIN_RIGHT2>,contactright21>)
SPINRIGHT22=DOT(SPIN_RIGHT2>,contactright22>)
SPINRIGHT23=DOT(SPIN_RIGHT2>,contactright23>)

CREEPE_LEFT3>=(v_contactleft3o_track3>+V_contleft3_N)/V
express(CREEPE_LEFT3>,track3)
CREEPELEFT31=DOT(CREEPE_LEFT3>,track31>)
CREEPELEFT32=DOT(CREEPE_LEFT3>,track32>)
CREEPELEFT33=DOT(CREEPE_LEFT3>,track33>)

CREEPE_RIGHT3>=(v_contactright3o_track3>+V_contright3_N)/V
express(CREEPE_RIGHT3>,track3)
CREEPERIGHT31=DOT(CREEPE_RIGHT3>,track31>)
CREEPERIGHT32=DOT(CREEPE_RIGHT3>,track32>)
CREEPERIGHT33=DOT(CREEPE_RIGHT3>,track33>)

SPIN_LEFT3>=(W_contactleft3_n>-w_track3_n)/V
SPINLEFT31=DOT(SPIN_LEFT3>,contactleft31>)
SPINLEFT32=DOT(SPIN_LEFT3>,contactleft32>)
SPINLEFT33=DOT(SPIN_LEFT3>,contactleft33>)

SPIN_RIGHT3>=(W_contactright3_n>-w_track3_n)/V
SPINRIGHT31=DOT(SPIN_RIGHT3>,contactright31>)
SPINRIGHT32=DOT(SPIN_RIGHT3>,contactright32>)
SPINRIGHT33=DOT(SPIN_RIGHT3>,contactright33>)

CREEPE_LEFT4>=(v_contactleft4o_track4>+V_contleft4_N)/V
express(CREEPE_LEFT2>,track4)
CREEPELEFT41=DOT(CREEPE_LEFT4>,track41>)
CREEPELEFT42=DOT(CREEPE_LEFT4>,track42>)
CREEPELEFT43=DOT(CREEPE_LEFT4>,track43>)

CREEPE_RIGHT4>=(v_contactright4o_track4>+V_contright4_N)/V
express(CREEPE_RIGHT4>,track4)
CREEPERIGHT41=DOT(CREEPE_RIGHT4>,track41>)
CREEPERIGHT42=DOT(CREEPE_RIGHT4>,track42>)
CREEPERIGHT43=DOT(CREEPE_RIGHT4>,track43>)

SPIN_LEFT4>=(W_contactleft4_n>-w_track4_n)/V
SPINLEFT41=DOT(SPIN_LEFT4>,contactleft41>)
SPINLEFT42=DOT(SPIN_LEFT4>,contactleft42>)
SPINLEFT43=DOT(SPIN_LEFT4>,contactleft43>)

SPIN_RIGHT4>=(W_contactright4_n>-w_track4_n)/V
SPINRIGHT41=DOT(SPIN_RIGHT4>,contactright41>)
SPINRIGHT42=DOT(SPIN_RIGHT4>,contactright42>)
SPINRIGHT43=DOT(SPIN_RIGHT4>,contactright43>)

```

%%
 %%%%%%%%% Contact Forces
 %%%%%%%%%

FORCE_contactleft1O>=F1left1*contactleft11>+F1left2*contactleft12>+F1left3*contactleft13>
 FORCE_contactright1O>=F1right1*contactright11>+F1right2*contactright12>+F1right3*contactright13>

FORCE_contactleft2O>=F2left1*contactleft21>+F2left2*contactleft22>+F2left3*contactleft23>
 FORCE_contactright2O>=F2right1*contactright21>+F2right2*contactright22>+F2right3*contactright23>

FORCE_contactleft3O>=F3left1*contactleft31>+F3left2*contactleft32>+F3left3*contactleft33>
 FORCE_contactright3O>=F3right1*contactright31>+F3right2*contactright32>+F3right3*contactright33>

FORCE_contactleft4O>=F4left1*contactleft41>+F4left2*contactleft42>+F4left3*contactleft43>
 FORCE_contactright4O>=F4right1*contactright41>+F4right2*contactright42>+F4right3*contactright43>

%%
 %%%%%%%%% Primary Suspension Forces
 %%%%%%%%%

SPECIFIED FLKx{4},FLKy{4},FLKz{4}
 SPECIFIED FRKx{4},FRKy{4},FRKz{4}
 SPECIFIED FLCx{4},FLCy{4},FLCz{4}
 SPECIFIED FRCx{4},FRCy{4},FRCz{4}

FLKx1 = (Kx/2)*(DOT(P_OL1_HOL1>,track11>))
 FLKy1 = (Ky/2)*(DOT(P_OL1_HOL1>,track12>))
 FLKz1 = (Kz/2)*(DOT(P_OL1_HOL1>,track13>))
 FRKx1 = (Kx/2)*(DOT(P_OR1_HOR1>,track11>))
 FRKy1 = (Ky/2)*(DOT(P_OR1_HOR1>,track12>))
 FRKz1 = (Kz/2)*(DOT(P_OR1_HOR1>,track13>))

FLKx2 = (Kx/2)*(DOT(P_OL2_HOL2>,track21>))
 FLKy2 = (Ky/2)*(DOT(P_OL2_HOL2>,track22>))
 FLKz2 = (Kz/2)*(DOT(P_OL2_HOL2>,track23>))
 FRKx2 = (Kx/2)*(DOT(P_OR2_HOR2>,track21>))
 FRKy2 = (Ky/2)*(DOT(P_OR2_HOR2>,track22>))
 FRKz2 = (Kz/2)*(DOT(P_OR2_HOR2>,track23>))

FLKx3 = (Kx/2)*(DOT(P_OL3_HOL3>,track31>))
 FLKy3 = (Ky/2)*(DOT(P_OL3_HOL3>,track32>))
 FLKz3 = (Kz/2)*(DOT(P_OL3_HOL3>,track33>))
 FRKx3 = (Kx/2)*(DOT(P_OR3_HOR3>,track31>))
 FRKy3 = (Ky/2)*(DOT(P_OR3_HOR3>,track32>))
 FRKz3 = (Kz/2)*(DOT(P_OR3_HOR3>,track33>))

FLKx4 = (Kx/2)*(DOT(P_OL4_HOL4>,track41>))
 FLKy4 = (Ky/2)*(DOT(P_OL4_HOL4>,track42>))
 FLKz4 = (Kz/2)*(DOT(P_OL4_HOL4>,track43>))
 FRKx4 = (Kx/2)*(DOT(P_OR4_HOR4>,track41>))
 FRKy4 = (Ky/2)*(DOT(P_OR4_HOR4>,track42>))
 FRKz4 = (Kz/2)*(DOT(P_OR4_HOR4>,track43>))

FLCx1 = (cx/2)*DT(DOT(P_OL1_HOL1>,track11>),track1)
 FLCy1 = (cy/2)*DT(DOT(P_OL1_HOL1>,track12>),track1)
 FLCz1 = (cz/2)*DT(DOT(P_OL1_HOL1>,track13>),track1)
 FRCx1 = (cx/2)*DT(DOT(P_OR1_HOR1>,track11>),track1)
 FRCy1 = (cy/2)*DT(DOT(P_OR1_HOR1>,track12>),track1)
 FRCz1 = (cz/2)*DT(DOT(P_OR1_HOR1>,track13>),track1)

FLCx2 = (cx/2)*DT(DOT(P_OL2_HOL2>,track21>),track2)
 FLCy2 = (cy/2)*DT(DOT(P_OL2_HOL2>,track22>),track2)
 FLCz2 = (cz/2)*DT(DOT(P_OL2_HOL2>,track23>),track2)
 FRCx2 = (cx/2)*DT(DOT(P_OR2_HOR2>,track21>),track2)
 FRCy2 = (cy/2)*DT(DOT(P_OR2_HOR2>,track22>),track2)
 FRCz2 = (cz/2)*DT(DOT(P_OR2_HOR2>,track23>),track2)

FLCx3 = (cx/2)*DT(DOT(P_OL3_HOL3>,track31>),track3)

$FLCy3 = (cy/2)*DT(DOT(P_OL3_HOL3>,track32>),track3)$
 $FLCz3 = (cz/2)*DT(DOT(P_OL3_HOL3>,track33>),track3)$
 $FRCx3 = (cx/2)*DT(DOT(P_OR3_HOR3>,track31>),track3)$
 $FRCy3 = (cy/2)*DT(DOT(P_OR3_HOR3>,track32>),track3)$
 $FRCz3 = (cz/2)*DT(DOT(P_OR3_HOR3>,track33>),track3)$

$FLCx4 = (cx/2)*DT(DOT(P_OL4_HOL4>,track41>),track4)$
 $FLCy4 = (cy/2)*DT(DOT(P_OL4_HOL4>,track42>),track4)$
 $FLCz4 = (cz/2)*DT(DOT(P_OL4_HOL4>,track43>),track4)$
 $FRCx4 = (cx/2)*DT(DOT(P_OR4_HOR4>,track41>),track4)$
 $FRCy4 = (cy/2)*DT(DOT(P_OR4_HOR4>,track42>),track4)$
 $FRCz4 = (cz/2)*DT(DOT(P_OR4_HOR4>,track43>),track4)$

$FORCE(OL1/HOL1,-FLKx1*track11>-FLKy1*track12>-FLKz1*track13>)$
 $FORCE(OL2/HOL2,-FLKx2*track21>-FLKy2*track22>-FLKz2*track23>)$
 $FORCE(OR1/HOR1,-FRKx1*track11>-FRKy1*track12>-FRKz1*track13>)$
 $FORCE(OR2/HOR2,-FRKx2*track21>-FRKy2*track22>-FRKz2*track23>)$

$FORCE(OL3/HOL3,-FLKx3*track31>-FLKy3*track32>-FLKz3*track33>)$
 $FORCE(OL4/HOL4,-FLKx4*track41>-FLKy4*track42>-FLKz4*track43>)$
 $FORCE(OR3/HOR3,-FRKx3*track31>-FRKy3*track32>-FRKz3*track33>)$
 $FORCE(OR4/HOR4,-FRKx4*track41>-FRKy4*track42>-FRKz4*track43>)$

$FORCE(OL1/HOL1,-FLCx1*track11>-FLCy1*track12>-FLCz1*track13>)$
 $FORCE(OL2/HOL2,-FLCx2*track21>-FLCy2*track22>-FLCz2*track23>)$
 $FORCE(OR1/HOR1,-FRCx1*track11>-FRCy1*track12>-FRCz1*track13>)$
 $FORCE(OR2/HOR2,-FRCx2*track21>-FRCy2*track22>-FRCz2*track23>)$

$FORCE(OL3/HOL3,-FLCx3*track31>-FLCy3*track32>-FLCz3*track33>)$
 $FORCE(OL4/HOL4,-FLCx4*track41>-FLCy4*track42>-FLCz4*track43>)$
 $FORCE(OR3/HOR3,-FRCx3*track31>-FRCy3*track32>-FRCz3*track33>)$
 $FORCE(OR4/HOR4,-FRCx4*track41>-FRCy4*track42>-FRCz4*track43>)$

%%%
 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Secondary Suspension Forces %%%
 %%%

SPECIFIED FFK2x,FFK2y,FFK2z,FFC2x,FFC2y,FFC2z
 SPECIFIED FRK2x,FRK2y,FRK2z,FRC2x,FRC2y,FRC2z

$FFK2x = (kx2)*(DOT(P_WF_h1o>,trackH11>))$
 $FFK2y = (ky2)*(DOT(P_WF_H1o>,trackH12>))$
 $FFK2z = (kz2)*(DOT(P_WF_H1o>,trackH13>))$
 $FRK2x = (kx2)*(DOT(P_WR_h2o>,trackH21>))$
 $FRK2y = (ky2)*(DOT(P_WR_H2o>,trackH22>))$
 $FRK2z = (kz2)*(DOT(P_WR_H2o>,trackH23>))$

$FFC2x = (cx2)*DT(DOT(P_WF_h1o>,trackH11>),trackH1)$
 $FFC2y = (cy2)*DT(DOT(P_WF_H1o>,trackH12>),trackH1)$
 $FFC2z = (cz2)*DT(DOT(P_WF_H1o>,trackH13>),trackH1)$
 $FRC2x = (cx2)*DT(DOT(P_WR_h2o>,trackH21>),trackH2)$
 $FRC2y = (cy2)*DT(DOT(P_WR_H2o>,trackH22>),trackH2)$
 $FRC2z = (cz2)*DT(DOT(P_WR_H2o>,trackH23>),trackH2)$

$FORCE(WF/H1C,-FFK2x*trackH11>-FFK2y*trackH12>-FFK2z*trackH13>)$
 $FORCE(WR/H2C,-FRK2x*trackH21>-FRK2y*trackH22>-FRK2z*trackH23>)$

$FORCE(WF/H1C,-FFC2x*trackH11>-FFC2y*trackH12>-FFC2z*trackH13>)$
 $FORCE(WR/H2C,-FRC2x*trackH21>-FRC2y*trackH22>-FRC2z*trackH23>)$

%%%
 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% External Forces and Torques %%%
 %%%

$FORCE_wheelset1O>=(Px1*track11>+Py1*track12>+Pz1*track13>)$
 $TORQUE_wheelset1>=(Lx1*wheelset11>+Ly1*wheelset12>+Lz1*wheelset13>)$

$FORCE_wheelset2O>=(Px2*track21>+Py2*track22>+Pz2*track23>)$
 $TORQUE_wheelset2>=(Lx2*wheelset21>+Ly2*wheelset22>+Lz2*wheelset23>)$

$FORCE_h1O>=(Pxh1*trackH11>+Pyh1*trackH12>+Pzh1*trackH13>)$

```
TORQUE_h1>=(Lxh1*h11>+Lyh1*h12>+Lzh1*h13>)

FORCE_wheelset3O>+=(Px3*track31>+Py3*track32>+Pz3*track33>)
TORQUE_wheelset3>=(Lx3*wheelset31>+Ly3*wheelset32>+Lz3*wheelset33>)

FORCE_wheelset4O>+=(Px4*track41>+Py4*track42>+Pz4*track43>)
TORQUE_wheelset4>=(Lx4*wheelset41>+Ly4*wheelset42>+Lz4*wheelset43>)

FORCE_h2O>+=(Pxh2*trackH21>+Pyh2*trackH22>+Pzh2*trackH23>)
TORQUE_h2>=(Lxh2*h21>+Lyh2*h22>+Lzh2*h23>)

FORCE_WO>+=(Pxw*trackW1>+Pyw*trackW2>+Pzw*trackW3>)
TORQUE_W>=(LxW*W1>+LyW*W2>+LzW*W3>)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%% Linear System for Normal Contact Forces
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

SPECIFIED VR{4},LR{4},LL{4},VL{4}

VECL> := (VL1)*wheelset13>
VECR> := (VR1)*wheelset13>
AMR> := CROSS(P_contactleft1o_contactright1o>,VECL>)+CROSS(P_contactright1o_contactright1o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset1o_contactright1o>,DT(momentum(linear,wheelset1o),N))+force_wheelset1o>)

AML> := CROSS(P_contactleft1o_contactleft1o>,VECL>)+CROSS(P_contactright1o_contactleft1o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset1o_contactleft1o>,DT(momentum(linear,wheelset1o),N))+force_wheelset1o>)

AXR := DOT(AMR>,track11>)
AXL := DOT(AML>,track11>)
AQ := [AXL,AXR]
SOLVE(MINORS,AQ,VL1,VR1)

VECL> := (VL2)*wheelset23>
VECR> := (VR2)*wheelset23>
AMR> := CROSS(P_contactleft2o_contactright2o>,VECL>)+CROSS(P_contactright2o_contactright2o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset2o_contactright2o>,DT(momentum(linear,wheelset2o),N))+force_wheelset2o>)

AML> := CROSS(P_contactleft2o_contactleft2o>,VECL>)+CROSS(P_contactright2o_contactleft2o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset2o_contactleft2o>,DT(momentum(linear,wheelset2o),N))+force_wheelset2o>)

AXR := DOT(AMR>,track21>)
AXL := DOT(AML>,track21>)
AQ := [AXL,AXR]
SOLVE(MINORS,AQ,VL2,VR2)

VECL> := (VL3)*wheelset33>
VECR> := (VR3)*wheelset33>
AMR> := CROSS(P_contactleft3o_contactright3o>,VECL>)+CROSS(P_contactright3o_contactright3o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset3o_contactright3o>,DT(momentum(linear,wheelset3o),N))+force_wheelset3o>)

AML> := CROSS(P_contactleft3o_contactleft3o>,VECL>)+CROSS(P_contactright3o_contactleft3o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset3o_contactleft3o>,DT(momentum(linear,wheelset3o),N))+force_wheelset3o>)

AXR := DOT(AMR>,track31>)
AXL := DOT(AML>,track31>)
AQ := [AXL,AXR]
SOLVE(MINORS,AQ,VL3,VR3)

VECL> := (VL4)*wheelset43>
VECR> := (VR4)*wheelset43>
AMR> := CROSS(P_contactleft4o_contactright4o>,VECL>)+CROSS(P_contactright4o_contactright4o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset4o_contactright4o>,DT(momentum(linear,wheelset4o),N))+force_wheelset4o>)

AML> := CROSS(P_contactleft4o_contactleft4o>,VECL>)+CROSS(P_contactright4o_contactleft4o>,VECR>)+&
CROSS(P_wheelset4o_contactleft4o>,DT(momentum(linear,wheelset4o),N))+force_wheelset4o>)

AXR := DOT(AMR>,track41>)
AXL := DOT(AML>,track41>)
AQ := [AXL,AXR]
```

SOLVE(MINORS,AQ,VL4,VR4)

%%
 %%% Outputs
 %%%

OUTPUT T,u1,u2,u3,u4,u5,u6
 OUTPUT T,u7,u8,u9,u10,u11,u12
 OUTPUT T,u13,u14,u15,u16,u17,u18
 OUTPUT T,u19,u20,u21,u22,u23,u24
 OUTPUT T,u25,u26,u27,u28,u29,u30
 OUTPUT T,u31,u32,u33,u34,u35,u36
 OUTPUT T,u37,u38,u39,u40,u41,u42
 OUTPUT T,F1left1,F1left2,F1left3,F1right1,F1right2,F1right3
 OUTPUT T,F2left1,F2left2,F2left3,F2right1,F2right2,F2right3
 OUTPUT T,F3left1,F3left2,F3left3,F3right1,F3right2,F3right3
 OUTPUT T,F4left1,F4left2,F4left3,F4right1,F4right2,F4right3
 OUTPUT T,rol1,ror1,rol2,ror2,lambdal1,lambdar1,lambdal2,lambdar2
 OUTPUT T,rol3,ror3,rol4,ror4,lambdal3,lambdar3,lambdal4,lambdar4
 OUTPUT

T,CREEPELEFT11,CREEPELEFT12,SPINLEFT13,CREEPERIGHT11,CREEPERIGHT12,SPINRIGHT13
 OUTPUT

T,CREEPELEFT21,CREEPELEFT22,SPINLEFT23,CREEPERIGHT21,CREEPERIGHT22,SPINRIGHT23
 OUTPUT

T,CREEPELEFT31,CREEPELEFT32,SPINLEFT33,CREEPERIGHT31,CREEPERIGHT32,SPINRIGHT33
 OUTPUT

T,CREEPELEFT41,CREEPELEFT42,SPINLEFT43,CREEPERIGHT41,CREEPERIGHT42,SPINRIGHT43

OUTPUT T,u1',u2',u3',u4',u5',u6'
 OUTPUT T,u7',u8',u9',u10',u11',u12'
 OUTPUT T,u13',u14',u15',u16',u17',u18'
 OUTPUT T,u19',u20',u21',u22',u23',u24'
 OUTPUT T,u25',u26',u27',u28',u29',u30'
 OUTPUT T,u31',u32',u33',u34',u35',u36'
 OUTPUT T,u37',u38',u39',u40',u41',u42'
 OUTPUT T,xH1,yH1,xr1,yr1,xr2,yr2
 OUTPUT T,xH2,yH2,xr3,yr3,xr4,yr4
 OUTPUT T,xW,yW
 OUTPUT T,FLKx1,FLKy1,FLKz1,FRKx1,FRKy1,FRKz1,FLCx1,FLCy1,FLCz1,FRCx1,FRCy1,FRCz1
 OUTPUT T,FLKx2,FLKy2,FLKz2,FRKx2,FRKy2,FRKz2,FLCx2,FLCy2,FLCz2,FRCx2,FRCy2,FRCz2
 OUTPUT T,FLKx3,FLKy3,FLKz3,FRKx3,FRKy3,FRKz3,FLCx3,FLCy3,FLCz3,FRCx3,FRCy3,FRCz3
 OUTPUT T,FLKx4,FLKy4,FLKz4,FRKx4,FRKy4,FRKz4,FLCx4,FLCy4,FLCz4,FRCx4,FRCy4,FRCz4
 OUTPUT T,FFK2x,FFK2y,FFK2z,FFC2x,FFC2y,FFC2z
 OUTPUT T,FRK2x,FRK2y,FRK2z,FRC2x,FRC2y,FRC2z
 OUTPUT T,LL1,VL1,LL2,VL2,LL3,VL3,LL4,VL4
 OUTPUT T,LR1,VR1,LR2,VR2,LR3,VR3,LR4,VR4

%%
 %%% Complete dynamic system
 %%%

zero=frstar()+fr()

%%
 %%% Trigonometric simplifications
 %%%

SPECIFIED cosaz{4},sinaz{4},cosazH{2},sinazH{2},cosazW,sinazW
 SPECIFIED cosaz1azH1,sinaz1azH1,cosaz2azH1,sinaz2azH1
 SPECIFIED cosaz3azH2,sinaz3azH2,cosaz4azH2,sinaz4azH2
 SPECIFIED cosazH1azW,sinazH1azW,cosazH2azW,sinazH2azW
 SPECIFIED cosu40,sinu40,cosu41,sinu41,cosu42,sinu42
 SPECIFIED cosphi{4},sinphi{4},cosphiH{2},sinphiH{2},cosphiW,sinphiW

cosaz1=cos(azimuth1)
 sinaz1=sin(azimuth1)
 cosaz2=cos(azimuth2)
 sinaz2=sin(azimuth2)
 cosazH1=cos(azimuthH1)
 sinazH1=sin(azimuthH1)
 cosaz3=cos(azimuth3)

```

sinaz3=sin(azimuth3)
cosaz4=cos(azimuth4)
sinaz4=sin(azimuth4)
cosazH2=cos(azimuthH2)
sinazH2=sin(azimuthH2)
cosazW=cos(azimuthW)
sinazW=sin(azimuthW)

```

```

cosaz1azH1=cos(azimuth1-azimuthH1)
sinaz1azH1=sin(azimuth1-azimuthH1)
cosaz2azH1=cos(azimuth2-azimuthH1)
sinaz2azH1=sin(azimuth2-azimuthH1)
cosaz3azH2=cos(azimuth3-azimuthH2)
sinaz3azH2=sin(azimuth3-azimuthH2)
cosaz4azH2=cos(azimuth4-azimuthH2)
sinaz4azH2=sin(azimuth4-azimuthH2)
cosazH1azW=cos(azimuthH1-azimuthW)
sinazH1azW=sin(azimuthH1-azimuthW)
cosazH2azW=cos(azimuthH2-azimuthW)
sinazH2azW=sin(azimuthH2-azimuthW)

```

```

cosu40=cos(u40)
sinu40=sin(u40)
cosu41=cos(u41)
sinu41=sin(u41)
cosu42=cos(u42)
sinu42=sin(u42)

```

```

cosphi1=cos(phi1)
sinphi1=sin(phi1)
cosphi2=cos(phi2)
sinphi2=sin(phi2)
cosphiH1=cos(phiH1)
sinphiH1=sin(phiH1)
cosphi3=cos(phi3)
sinphi3=sin(phi3)
cosphi4=cos(phi4)
sinphi4=sin(phi4)
cosphiH2=cos(phiH2)
sinphiH2=sin(phiH2)
cosphiW=cos(phiW)
sinphiW=sin(phiW)

```

```

zero:=REPLACE(zero,cos(azimuth1)=cosaz1,sin(azimuth1)=sinaz1,cos(azimuth2)=cosaz2,sin(azimuth2)=sinaz2,&
cos(azimuthH1)=cosazH1,sin(azimuthH1)=sinazH1,cos(azimuth3)=cosaz3,sin(azimuth3)=sinaz3,&
cos(azimuth4)=cosaz4,sin(azimuth4)=sinaz4,cos(azimuthH2)=cosazH2,sin(azimuthH2)=sinazH2,&
cos(azimuthW)=cosazW,sin(azimuthW)=sinazW,cos(azimuth1-azimuthH1)=cosaz1azH1,&
sin(azimuth1-azimuthH1)=sinaz1azH1,cos(azimuth2-azimuthH1)=cosaz2azH1,&
sin(azimuth2-azimuthH1)=sinaz2azH1,cos(azimuth3-azimuthH2)=cosaz3azH2,&
sin(azimuth3-azimuthH2)=sinaz3azH2,cos(azimuth4-azimuthH2)=cosaz4azH2,&
sin(azimuth4-azimuthH2)=sinaz4azH2,cos(azimuthH1-azimuthW)=cosazH1azW,&
sin(azimuthH1-azimuthW)=sinazH1azW,cos(azimuthH2-azimuthW)=cosazH2azW,&
sin(azimuthH2-azimuthW)=sinazH2azW,cos(u40)=cosu40,sin(u40)=sinu40,cos(u41)=cosu41,sin(u41)=sinu41,&
cos(u42)=cosu42,sin(u42)=sinu42,cos(phi1)=cosphi1,sin(phi1)=sinphi1,cos(phi2)=cosphi2,sin(phi2)=sinphi2,&
cos(phiH1)=cosphiH1,sin(phiH1)=sinphiH1,cos(phi3)=cosphi3,sin(phi3)=sinphi3,cos(phi4)=cosphi4,sin(phi4)=sinphi

```

4,&

```

cos(phiH2)=cosphiH2,sin(phiH2)=sinphiH2,cos(phiW)=cosphiW,sin(phiW)=sinphiW)

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Trigonometric simplifications - WHEELSET 1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

FLKx1:=REPLACE(FLKx1,cos(azimuth1)=cosaz1,sin(azimuth1)=sinaz1,cos(azimuth2)=cosaz2,sin(azimuth2)=sinaz2

```

,&

```

cos(azimuthH1)=cosazH1,sin(azimuthH1)=sinazH1,&cos(azimuth1-azimuthH1)=cosaz1azH1,&
sin(azimuth1-azimuthH1)=sinaz1azH1,cos(azimuth2-azimuthH1)=cosaz2azH1,sin(azimuth2-
azimuthH1)=sinaz2azH1,&
cos(phi1)=cosphi1,sin(phi1)=sinphi1,cos(phi2)=cosphi2,sin(phi2)=sinphi2,cos(phiH1)=cosphiH1,sin(phiH1)=sinphiH

```

1)

```

FRKx1:=REPLACE(FRKx1,cos(azimuth1)=cosaz1,sin(azimuth1)=sinaz1,cos(azimuth2)=cosaz2,sin(azimuth2)=sinaz

```

2,&

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az4azH2}, \&$
 $\cos(\text{phi3})=\cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3})=\sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4})=\cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4})=\sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2})=\cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2})=\sin\text{phiH}$
2)

$\text{FRCy4}:=\text{REPLACE}(\text{FRCy4}, \cos(\text{azimuth3})=\cos\text{az3}, \sin(\text{azimuth3})=\sin\text{az3}, \cos(\text{azimuth4})=\cos\text{az4}, \sin(\text{azimuth4})=\sin\text{az4}$
 $\&$
 $, \cos(\text{azimuthH2})=\cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2})=\sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az3azH2}, \&$
 $\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az4azH2}, \&$
 $\cos(\text{phi3})=\cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3})=\sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4})=\cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4})=\sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2})=\cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2})=\sin\text{phiH}$
2)

$\text{FLCz4}:=\text{REPLACE}(\text{FLCz4}, \cos(\text{azimuth3})=\cos\text{az3}, \sin(\text{azimuth3})=\sin\text{az3}, \cos(\text{azimuth4})=\cos\text{az4}, \sin(\text{azimuth4})=\sin\text{az4},$
 $\&$
 $\cos(\text{azimuthH2})=\cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2})=\sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az3azH2}, \&$
 $\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az4azH2}, \&$
 $\cos(\text{phi3})=\cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3})=\sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4})=\cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4})=\sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2})=\cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2})=\sin\text{phiH}$
2)

$\text{FRCz4}:=\text{REPLACE}(\text{FRCz4}, \cos(\text{azimuth3})=\cos\text{az3}, \sin(\text{azimuth3})=\sin\text{az3}, \cos(\text{azimuth4})=\cos\text{az4}, \sin(\text{azimuth4})=\sin\text{az4}$
 $\&$
 $, \cos(\text{azimuthH2})=\cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2})=\sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az3azH2}, \&$
 $\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2})=\sin\text{az4azH2}, \&$
 $\cos(\text{phi3})=\cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3})=\sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4})=\cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4})=\sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2})=\cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2})=\sin\text{phiH}$
2)

$$\cos(\phi_{H2})=\cos\phi_{H2},\sin(\phi_{H2})=\sin\phi_{H2},\cos(\phi_W)=\cos\phi_W,\sin(\phi_W)=\sin\phi_W$$
$$\begin{aligned} \text{FRK2y} &= \text{REPLACE}(\text{FRK2y}, \cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuthW}) = \cos\text{azW}, & \& \\ \sin(\text{azimuthW}) &= \sin\text{azW}, \cos(\text{azimuthH2}-\text{azimuthW}) = \cos\text{azH2azW}, \sin(\text{azimuthH2}-\text{azimuthW}) = \sin\text{azH2azW}, & \& \\ \cos(\text{u40}) &= \cos\text{u40}, \sin(\text{u40}) = \sin\text{u40}, \cos(\text{u41}) = \cos\text{u41}, \sin(\text{u41}) = \sin\text{u41}, \cos(\text{u42}) = \cos\text{u42}, \sin(\text{u42}) = \sin\text{u42}, & \& \\ \cos(\text{phiH2}) &= \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2}, \cos(\text{phiW}) = \cos\text{phiW}, \sin(\text{phiW}) = \sin\text{phiW}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{FRK2z} &= \text{REPLACE}(\text{FRK2z}, \cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuthW}) = \cos\text{azW}, \& \\ \sin(\text{azimuthW}) &= \sin\text{azW}, \cos(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \cos\text{azH2azW}, \sin(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \sin\text{azH2azW}, \& \\ \cos(\text{u40}) &= \cos\text{u40}, \sin(\text{u40}) = \sin\text{u40}, \cos(\text{u41}) = \cos\text{u41}, \sin(\text{u41}) = \sin\text{u41}, \cos(\text{u42}) = \cos\text{u42}, \sin(\text{u42}) = \sin\text{u42}, \& \\ \cos(\text{phiH2}) &= \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2}, \cos(\text{phiW}) = \cos\text{phiW}, \sin(\text{phiW}) = \sin\text{phiW}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{FRC2x} &:= \text{REPLACE}(\text{FRC2x}, \cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuthW}) = \cos\text{azW}, \& \\ &\sin(\text{azimuthW}) = \sin\text{azW}, \cos(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \cos\text{azH2azW}, \sin(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \sin\text{azH2azW}, \& \\ &\cos(\text{u40}) = \cos\text{u40}, \sin(\text{u40}) = \sin\text{u40}, \cos(\text{u41}) = \cos\text{u41}, \sin(\text{u41}) = \sin\text{u41}, \cos(\text{u42}) = \cos\text{u42}, \sin(\text{u42}) = \sin\text{u42}, \& \\ &\cos(\text{phiH2}) = \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2}, \cos(\text{phiW}) = \cos\text{phiW}, \sin(\text{phiW}) = \sin\text{phiW}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{FRC2y} &:= \text{REPLACE}(\text{FRC2y}, \cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuthW}) = \cos\text{azW}, \& \\ &\sin(\text{azimuthW}) = \sin\text{azW}, \cos(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \cos\text{azH2azW}, \sin(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \sin\text{azH2azW}, \& \\ &\cos(\text{u40}) = \cos\text{u40}, \sin(\text{u40}) = \sin\text{u40}, \cos(\text{u41}) = \cos\text{u41}, \sin(\text{u41}) = \sin\text{u41}, \cos(\text{u42}) = \cos\text{u42}, \sin(\text{u42}) = \sin\text{u42}, \& \\ &\cos(\text{phiH2}) = \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2}, \cos(\text{phiW}) = \cos\text{phiW}, \sin(\text{phiW}) = \sin\text{phiW}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{FRC2z} = & \text{REPLACE}(\text{FRC2z}, \cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuthW}) = \cos\text{azW}, \& \\ & \sin(\text{azimuthW}) = \sin\text{azW}, \cos(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \cos\text{azH2azW}, \sin(\text{azimuthH2} - \text{azimuthW}) = \sin\text{azH2azW}, \& \\ & \cos(\text{u40}) = \cos\text{u40}, \sin(\text{u40}) = \sin\text{u40}, \cos(\text{u41}) = \cos\text{u41}, \sin(\text{u41}) = \sin\text{u41}, \cos(\text{u42}) = \cos\text{u42}, \sin(\text{u42}) = \sin\text{u42}, \& \\ & \cos(\text{phiH2}) = \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2}, \cos(\text{phiW}) = \cos\text{phiW}, \sin(\text{phiW}) = \sin\text{phiW}) \end{aligned}$$

Trigonometric simplifications - Vertical forces

$$\begin{aligned} \text{VL1} &:= \text{REPLACE}(\text{VL1}, \cos(\text{azimuth1}) = \cos\text{az1}, \sin(\text{azimuth1}) = \sin\text{az1}, \cos(\text{azimuth2}) = \cos\text{az2}, \sin(\text{azimuth2}) = \sin\text{az2}, & \\ &\cos(\text{azimuthH1}) = \cos\text{azH1}, \sin(\text{azimuthH1}) = \sin\text{azH1}, \cos(\text{azimuth1}-\text{azimuthH1}) = \cos\text{az1azH1}, & \\ &\sin(\text{azimuth1}-\text{azimuthH1}) = \sin\text{az1azH1}, \cos(\text{azimuth2}-\text{azimuthH1}) = \cos\text{az2azH1}, \sin(\text{azimuth2}- & \\ \text{azimuthH1}) = \sin\text{az2azH1}, & \\ \cos(\text{phi1}) = \cos\text{phi1}, \sin(\text{phi1}) = \sin\text{phi1}, \cos(\text{phi2}) = \cos\text{phi2}, \sin(\text{phi2}) = \sin\text{phi2}, \cos(\text{phiH1}) = \cos\text{phiH1}, \sin(\text{phiH1}) = \sin\text{phiH1} & \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{VR1} &= \text{REPLACE}(\text{VR1}, \cos(\text{azimuth1}) = \cos\text{az1}, \sin(\text{azimuth1}) = \sin\text{az1}, \cos(\text{azimuth2}) = \cos\text{az2}, \sin(\text{azimuth2}) = \sin\text{az2}, & \& \\ & \cos(\text{azimuthH1}) = \cos\text{azH1}, \sin(\text{azimuthH1}) = \sin\text{azH1}, \cos(\text{azimuth1}-\text{azimuthH1}) = \cos\text{az1azH1}, & \& \\ & \sin(\text{azimuth1}-\text{azimuthH1}) = \sin\text{az1azH1}, \cos(\text{azimuth2}-\text{azimuthH1}) = \cos\text{az2azH1}, \sin(\text{azimuth2}- & \\ & \text{azimuthH1}) = \sin\text{az2azH1}, & \& \\ & \cos(\text{phi1}) = \cos\text{phi1}, \sin(\text{phi1}) = \sin\text{phi1}, \cos(\text{phi2}) = \cos\text{phi2}, \sin(\text{phi2}) = \sin\text{phi2}, \cos(\text{phiH1}) = \cos\text{phiH1}, \sin(\text{phiH1}) = \sin\text{phiH1} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
& \text{VL2:=REPLACE(VL2,cos(azimuth1)=cosaz1,sin(azimuth1)=sinaz1,cos(azimuth2)=cosaz2,sin(azimuth2)=sinaz2,} \\
& \text{cos(azimuthH1)=cosazH1,sin(azimuthH1)=sinazH1,cos(azimuth1-azimuthH1)=cosaz1azH1,} \\
& \text{sin(azimuth1-azimuthH1)=sinaz1azH1,cos(azimuth2-azimuthH1)=cosaz2azH1,sin(azimuth2-} \\
& \text{azimuthH1)=sinaz2azH1,} \\
& \text{cos(phi1)=cosphi1,sin(phi1)=sinphi1,cos(phi2)=cosphi2,sin(phi2)=sinphi2,cos(phiH1)=cosphiH1,sin(phiH1)=sinphiH1} \\
& 1)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{VR2} &= \text{REPLACE}(\text{VR2}, \cos(\text{azimuth1}) = \cos\text{az1}, \sin(\text{azimuth1}) = \sin\text{az1}, \cos(\text{azimuth2}) = \cos\text{az2}, \sin(\text{azimuth2}) = \sin\text{az2}, & \& \\ & \cos(\text{azimuthH1}) = \cos\text{azH1}, \sin(\text{azimuthH1}) = \sin\text{azH1}, \cos(\text{azimuth1}-\text{azimuthH1}) = \cos\text{az1azH1}, & \& \\ & \sin(\text{azimuth1}-\text{azimuthH1}) = \sin\text{az1azH1}, \cos(\text{azimuth2}-\text{azimuthH1}) = \cos\text{az2azH1}, \sin(\text{azimuth2}- & \\ & \text{azimuthH1}) = \sin\text{az2azH1}, & \& \\ & \cos(\text{phi1}) = \cos\text{phi1}, \sin(\text{phi1}) = \sin\text{phi1}, \cos(\text{phi2}) = \cos\text{phi2}, \sin(\text{phi2}) = \sin\text{phi2}, \cos(\text{phiH1}) = \cos\text{phiH1}, & \& \\ & \sin(\text{phiH1}) = \sin\text{phiH1} & \& \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{VL3} &:= \text{REPLACE}(\text{VL3}, \cos(\text{azimuth3}) = \cos\text{az3}, \sin(\text{azimuth3}) = \sin\text{az3}, \cos(\text{azimuth4}) = \cos\text{az4}, \sin(\text{azimuth4}) = \sin\text{az4}, \& \\ &\cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2}) = \cos\text{az3azH2}, \& \\ &\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2}) = \sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2}) = \cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}- \\ &\text{azimuthH2}) = \sin\text{az4azH2}, \& \\ &\cos(\text{phi3}) = \cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3}) = \sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4}) = \cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4}) = \sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2}) = \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2} \end{aligned}$$

```
VR3:=REPLACE(VR3,cos(azimuth3)=cosaz3,sin(azimuth3)=sinaz3,cos(azimuth4)=cosaz4,sin(azimuth4)=sinaz4,&
cos(azimuthH2)=cosazH2,sin(azimuthH2)=sinazH2,cos(azimuth3-azimuthH2)=cosaz3azH2,&
sin(azimuth3-azimuthH2)=sinaz3azH2,cos(azimuth4-azimuthH2)=cosaz4azH2,sin(azimuth4-
azimuthH2)=sinaz4azH2,&
```

$$2) \quad \cos(\phi_3)=\cos\phi_3, \sin(\phi_3)=\sin\phi_3, \cos(\phi_4)=\cos\phi_4, \sin(\phi_4)=\sin\phi_4, \cos(\phi_{H2})=\cos\phi_{H2}, \sin(\phi_{H2})=\sin\phi_{H2}$$
$$\begin{aligned} \text{VL4} &:= \text{REPLACE}(\text{VL4}, \cos(\text{azimuth3}) = \cos\text{az3}, \sin(\text{azimuth3}) = \sin\text{az3}, \cos(\text{azimuth4}) = \cos\text{az4}, \sin(\text{azimuth4}) = \sin\text{az4}, \& \\ &\cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2}) = \cos\text{az3azH2}, \& \\ &\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2}) = \sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2}) = \cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}- \\ &\text{azimuthH2}) = \sin\text{az4azH2}, \& \\ &\cos(\text{phi3}) = \cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3}) = \sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4}) = \cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4}) = \sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2}) = \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2} \\ 2) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{VR4:} &= \text{REPLACE}(\text{VR4}, \cos(\text{azimuth3}) = \cos\text{az3}, \sin(\text{azimuth3}) = \sin\text{az3}, \cos(\text{azimuth4}) = \cos\text{az4}, \sin(\text{azimuth4}) = \sin\text{az4}, \& \\ &\cos(\text{azimuthH2}) = \cos\text{azH2}, \sin(\text{azimuthH2}) = \sin\text{azH2}, \cos(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2}) = \cos\text{az3azH2}, \& \\ &\sin(\text{azimuth3}-\text{azimuthH2}) = \sin\text{az3azH2}, \cos(\text{azimuth4}-\text{azimuthH2}) = \cos\text{az4azH2}, \sin(\text{azimuth4}- \\ &\text{azimuthH2}) = \sin\text{az4azH2}, \& \\ &\cos(\text{phi3}) = \cos\text{phi3}, \sin(\text{phi3}) = \sin\text{phi3}, \cos(\text{phi4}) = \cos\text{phi4}, \sin(\text{phi4}) = \sin\text{phi4}, \cos(\text{phiH2}) = \cos\text{phiH2}, \sin(\text{phiH2}) = \sin\text{phiH2} \\ 2) \end{aligned}$$
[illegible]

CODE DYNAMICS() vagao_via.c